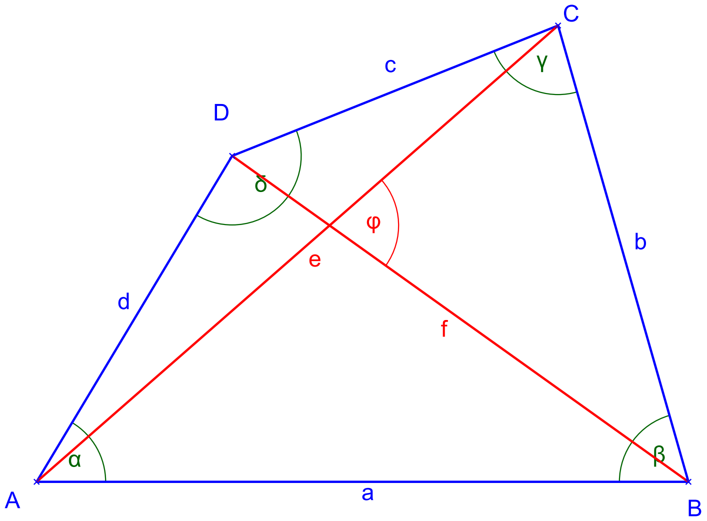
Obvod a obsah štvoruholníka

D. Štyri body roviny z ktorých žiadne tri nie sú kolineárne (neležia na jednej priamke) tvoria jeden štvoruholník. Tie body (A, B, C, D) sú vrcholy štvoruholníka.



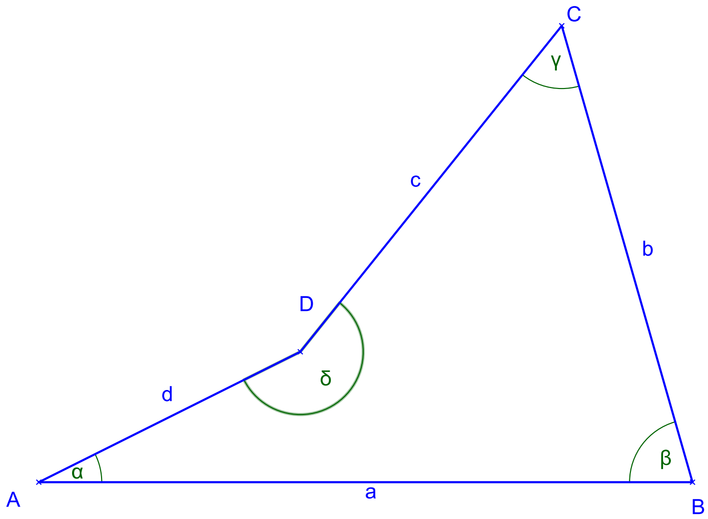
strany štvoruholníka (a, b, c, d) – spojnice susedných vrcholov
vnútorné uhly štvoruholníka (α, β, γ, δ) – uhly susedných strán, kde vnútro uhla je vnútro štvoruholníka
uhlopriečky štvoruholníka (e, f) – spojnice protiľahlých vrcholov
uhol uhlopriečok štvoruholníka (φ)

V. Súčet vnútorných uhlov štvoruholníka je 360°.

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

triedenie štvoruholníkov podľa vnútorných uhlov

konvexný štvoruholník – všetky vnútorné uhly má menšie ako 180°
konkávny štvoruholník – jeden vnútorný uhol má väčší ako 180°



konkávny štvoruholník

triedenie podľa počtu rovnobežných strán

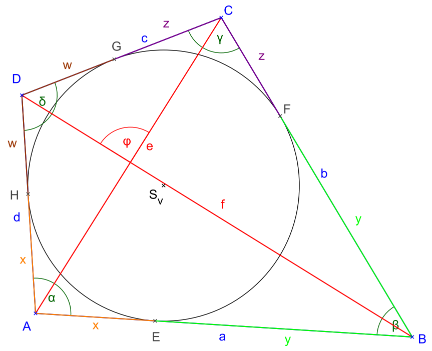
rôznobežník – nemá rovnobežné strany (všeobecný štvoruholník, deltoid)
lichobežník – má presne dve strany rovnobežné – protiľahlé
rovnobežník – má dve a dve strany rovnobežné (rovnobežník, kosoštvorec, obdĺžnik, štvorec)

triedenie podľa počtu zhodných strán

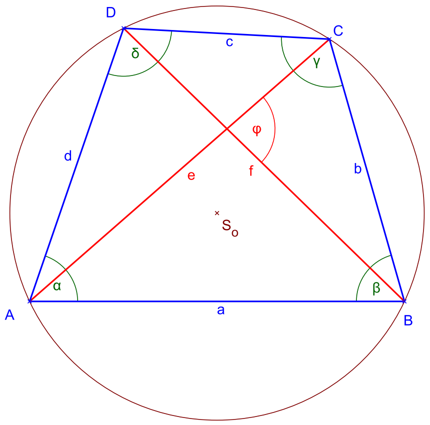
štyri – štvorec, kosoštvorec
tri – lichobežník
dve a dve – obdĺžnik, deltoid
dve – lichobežník
nemá – všeobecný štvoruholník

triedenie podľa špeciálnej vlastnosti

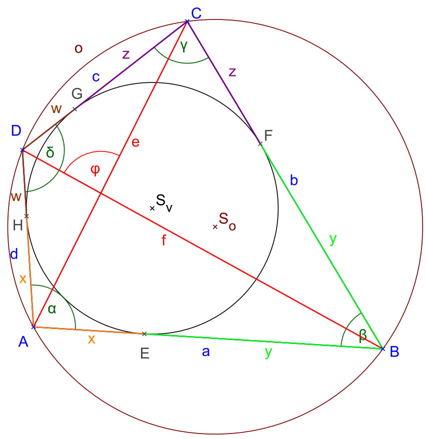
dotyčnicový štvoruholník – existuje vpísaná kružnica (štvorec, kosoštvorec, deltoid, aj všeobecný môže byť) – všetky strany štvoruholníka sú dotyčnicami ku jednej kružnici
tetivový štvoruholník – existuje opísaná kružnica (štvorec, obdĺžnik, rovnoramenný lichobežník, deltoid, aj všeobecný môže byť) – všetky strany štvoruholníka sú tetivami jednej kružnice
dvojstredový štvoruholník – existuje aj vpísaná aj opísaná kružnica (štvorec, deltoid, aj všeobecný môže byť)



dotyčnicový

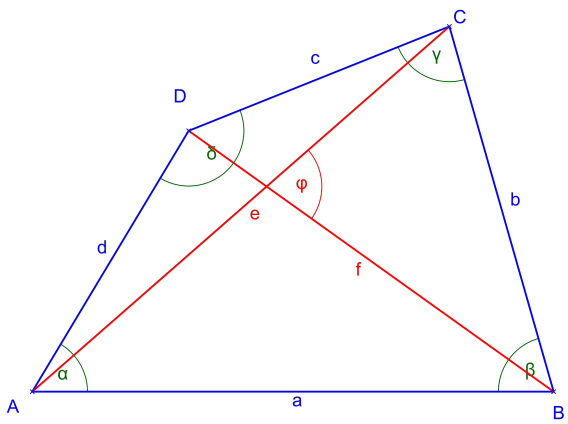


tetivový



dvojstredový

1. všeobecný štvoruholník



$o = a + b + c + d$

$S = \frac{ef.\sin\varphi}{2}$

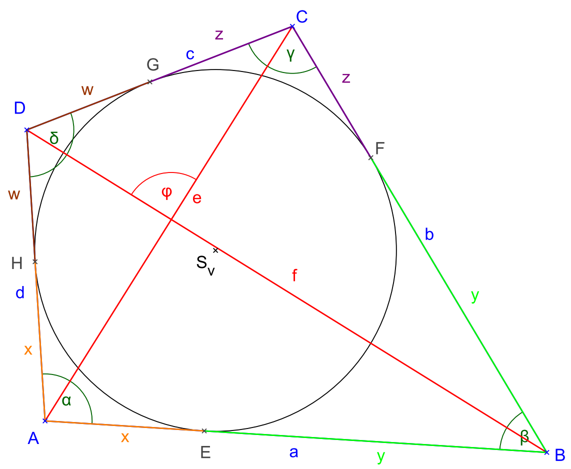
$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{o}{2}$ $\theta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \vee \frac{\beta+\delta}{2}$

Bretschneiderova-formula

$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd.\cos^2\theta}$

2. dotyčnicový štvoruholník

D. Štvoruholník, ktorému možno vpísať kružnicu.



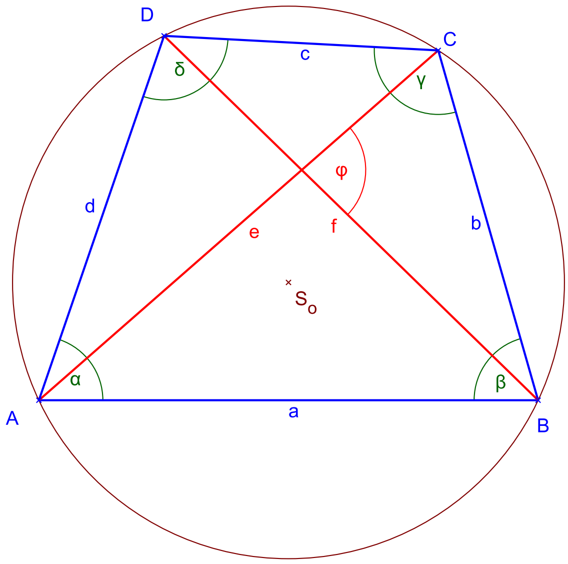
pre strany platí:

$a + c = b + d$

$S = s.\rho$

3. tetivový štvoruholník

D. Štvoruholník, ktorému možno opísať kružnicu.



pre strany platí Ptolemaiova veta:

$a.c + b.d = e.f$

pre vnútorné uhly platí:

$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

Brahmaguptova veta

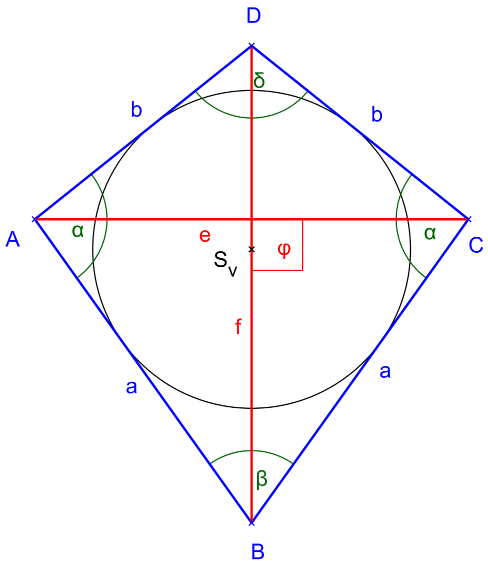
$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Brahmaguptova veta pre dvojstredové štvoruholníky

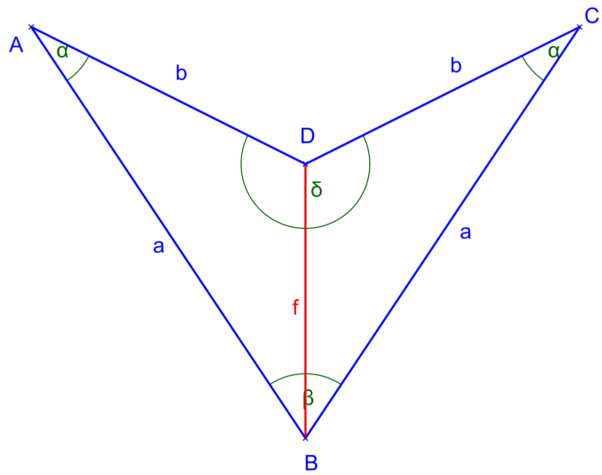
$S = \sqrt{abcd}$

4. deltoid

D. Štvoruholník, ktorý má dve a dve susedné strany zhodné.



konvexný



konkávny

V.

dva vnútorné uhly sú zhodné

uhlopriečky sú rôzne ($e \neq f$)

uhlopriečky sú kolmé

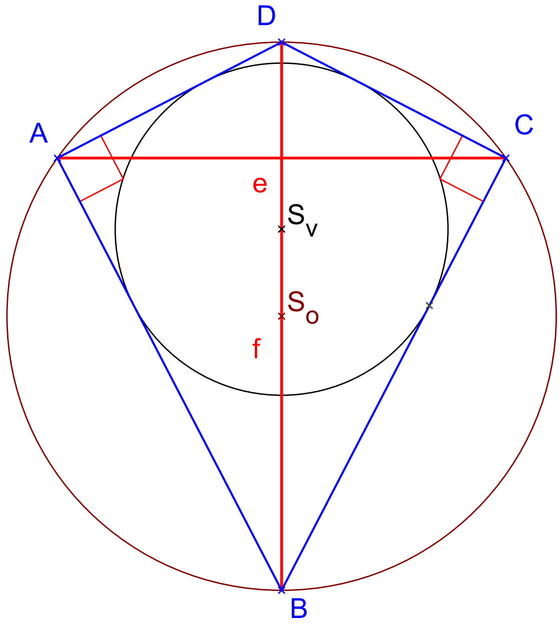
iba jedna uhlopriečka rozpoľuje druhú

P. Ku konvexným deltoidom vždy existuje vpísaná kružnica (dotyčnicový štvoruholník).

$o = 2(a + b)$

$S = \frac{ef}{2}$

4.a, dvojstredový deltoid – pravouhlý deltoid



$S = a.b$

5. lichobežník

D. Štvoruholník, ktorý má iba dve protiľahlé strany rovnobežné.

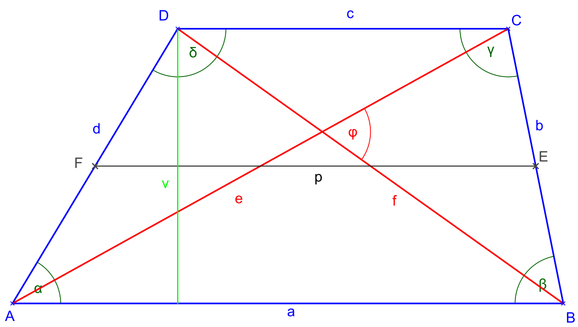
základne (a, c) – dve rovnobežné strany lichobežníka
ramená (b, d) – dve rôznobežné strany lichobežníka
výška (v) – vzdialenosť rôznobežných strán
stredná priečka (p) – spojnica stredov ramien – je aritmetický priemer základní: $p = \frac{a+c}{2}$

$$S = \frac{a+c}{2}.v = p.v = \frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{(a+b-c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c+d)}$$

na výpočet výšky slúži vzorec:

$$v = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d^2-b^2+(a-c)^2}{2(a-c)}\right)^2}$$

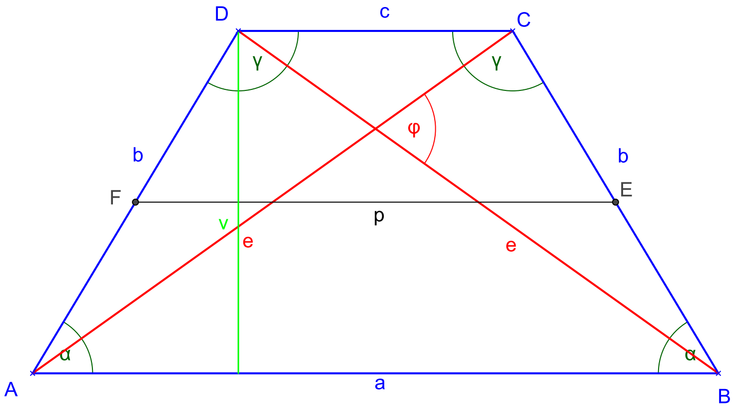
5.a, všeobecný lichobežník



V.

súčet uhlov pri jednom ramene je 180° (striedavé uhly: α + δ = β + γ = 180°)
všetky vnútorné uhly sú rôzne
uhlopriečky sú rôzne (e ≠ f)
uhlopriečky nie sú kolmé
uhlopriečky sa navzájom nerozpoľujú

5.b, rovnoramenný (tetivový) lichobežník

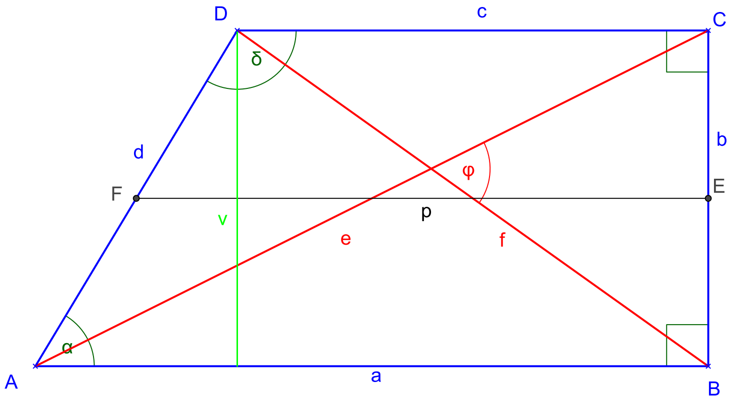


V.

dve ramená sú zhodné ($b = d$)
vnútorné uhly pri jednej základni sú zhodné ($\alpha = \beta \wedge \gamma = \delta$)
uhlopriečky sú zhodné ($e = f$)
uhlopriečky sa navzájom nerozpoľujú

$S = (a - b.\cos\alpha)b.\sin\alpha = (c + b.\cos\alpha)b.\sin\alpha$

5.c, pravouhlý lichobežník

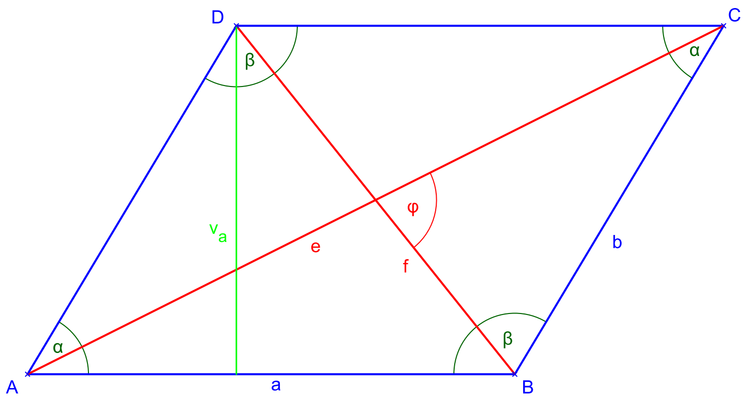


V.

uhlopriečky sú rôzne ($e \neq f$)
uhlopriečky nie sú kolmé
uhlopriečky sa navzájom nerozpoľujú

6. rovnobežník (kosodĺžnik)

D. Štvoruholník, ktorý má protiľahlé strany rovnobežné.



V.

protiľahlé strany sú zhodné ($a = c \wedge b = d$)
protiľahlé vnútorné uhly sú zhodné ($\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$)
súčet susedných uhlov je 180°
uhlopriečky sú rôzne ($e \neq f$)
uhlopriečky nie sú kolmé

uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú

$o = 2(a + b)$

$S = a.v_a = a.b.\sin\alpha = a.b.\sin\beta = \frac{ef.\sin\varphi}{2}$

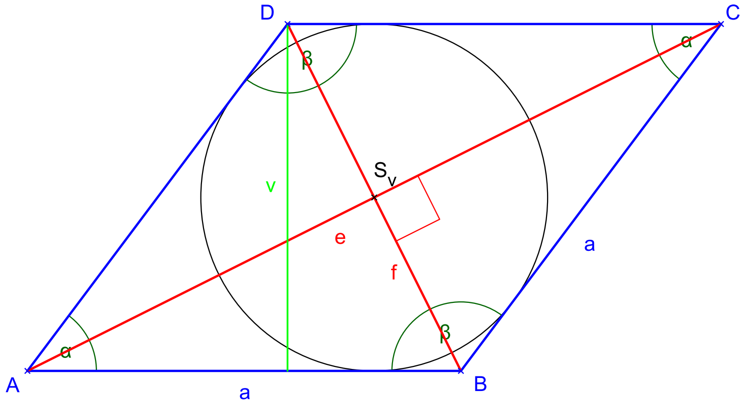
V.

$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

$e = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab.\cos\alpha}$ $\quad$ $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab.\cos\alpha}$

7. kosoštvorec

D. Taký rovnobežník, ktorý má všetky strany zhodné.



V.

protiľahlé vnútorné uhly sú zhodné ($\alpha = \gamma \wedge \beta = \delta$)
súčet susedných uhlov je 180°
uhlopriečky sú rôzne ($e \neq f$)
uhlopriečky sú kolmé
uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú
uhlopriečky rozpoľujú vnútorné uhly

P. Ku kosoštvorci vždy existuje vpísaná kružnica (dotyčnicový štvoruholník).

$o = 4a$

$S = a.v = a^2.\sin\alpha = a^2.\sin\beta = \frac{ef}{2}$

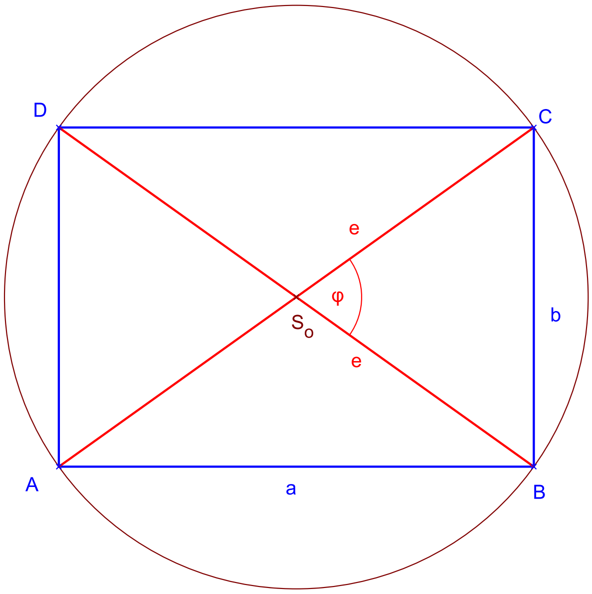
V.

$e^2 + f^2 = 4a^2$ $\quad$ $\rho = \frac{v}{2}$

$e = 2a.\cos\frac{\alpha}{2}$ $\quad$ $f = 2a.\sin\frac{\alpha}{2}$

8. obdĺžnik

D. Taký rovnobežník, ktorý má všetky vnútorné uhly 90°.



V.

uhlopriečky sú zhodné (e = f)
uhlopriečky nie sú kolmé
uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú

P. K obdĺžniku vždy existuje opísaná kružnica (tetivový štvoruholník).

$o = 2(a + b)$

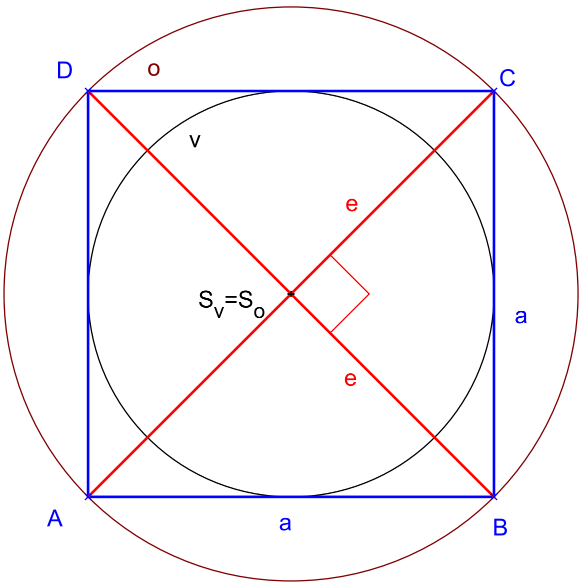
$S = a.b = \frac{e^2.\sin\varphi}{2}$

V.

$e^2 = a^2 + b^2$ $\qquad$ $r = \frac{e}{2}$

9. štvorec

D. Taký rovnobežník, ktorý má všetky strany zhodné a všetky vnútorné uhly 90°.



V.

uhlopriečky sú zhodné (e = f)
uhlopriečky sú kolmé
uhlopriečky sa navzájom rozpoľujú
uhlopriečky rozpoľujú vnútorné uhly

P. K štvorci vždy existuje vpísaná aj opísaná kružnica (dvojstredový štvoruholník).

$o = 4a$

$S = a^2 = \frac{e^2}{2}$

V.

$e = a\sqrt{2}$ $\rho = \frac{a}{2}$ $r = \frac{e}{2}$

príklad:

Vypočítajte obsah S a obvod o štvorca, ktorého uhlopriečka e = 8.

$a^2 + a^2 = e^2$

$2a^2 = e^2$

$a^2 = \frac{e^2}{2} = \frac{8^2}{2} = 32 = S \longrightarrow a = \sqrt{32} = 5{,}657$

$o = 4a = 4.5{,}657 = 22{,}627$

Vypočítajte obsah obdĺžnika, ak jeho obvod je 30,6 a jedna jeho strana má dĺžku 6,8.

$o = 2(a + b) \longrightarrow b = \frac{o}{2} - a = 15{,}3 - 6{,}8 = 8{,}5$

$S = a.b = 6{,}8.8{,}5 = 57{,}8$

Vypočítajte obsah kosoštvorca, ktorého obvod o = 104 a pomer uhlopriečok $\frac{e}{f} = \frac{5}{12}$.

$o = 4a \longrightarrow a = \frac{o}{4} = \frac{104}{4} = 26$

$e = \frac{5}{12}.f$

$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{f^2}{4} = \frac{\left(\frac{5}{12}.f\right)^2}{4} + \frac{f^2}{4} = \frac{\frac{25}{144}.f^2}{4} + \frac{f^2}{4} = \frac{25.f^2}{576} + \frac{f^2}{4} = \frac{25.f^2+144.f^2}{576} = \frac{169.f^2}{576}$

$a = \frac{13.f}{24} \longrightarrow f = \frac{24.a}{13} = \frac{24.26}{13} = 48$

$e = \frac{5}{12}.f = \frac{5}{12}.48 = 20$

$S = \frac{ef}{2} = \frac{20.48}{2} = 480$

$\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\frac{e}{2}}{\frac{f}{2}} = \frac{e}{2}.\frac{2}{f} = \frac{e}{f} = \frac{5}{12} = 0{,}416\,\overline{6} \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = \mathrm{tg}^{-1}\,0{,}416\,\overline{6} = 22°37'$

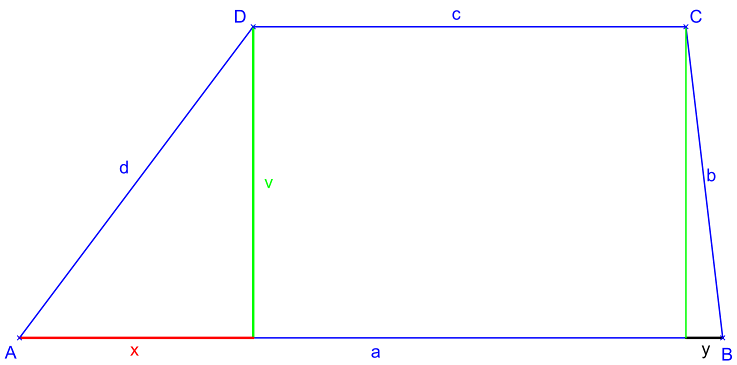
$\beta = 45°14'$

$S = a^2.\sin\beta = 26^2.\sin 45°14' = 480$

Vypočítajte obsah rovnobežníka, ak sú uhlopriečky e = 14 a f = 10 a uhol nimi zovretý φ = 55°.

$S = \frac{e.f.\sin\varphi}{2} = \frac{14.10.\sin 55°}{2} = 57{,}341$

Vypočítajte obsah lichobežníka ABCD so stranami: a = 65; b = 29; c = 40; d = 36



$x + y = a - c = 65 - 40 = 25$

$\left.\begin{aligned} d^2 &= x^2 + v^2 \\ b^2 &= y^2 + v^2 \end{aligned}\right\}$ I. + (-1).II.

$d^2 - b^2 = x^2 - y^2$

$36^2 - 29^2 = x^2 - y^2$

$455 = x^2 - y^2$

$455 = (x + y)(x - y)$

$455 = 25(x - y)$ /:25

$$\left.\begin{aligned} 18{,}2 &= x - y \\ 25 &= x + y \end{aligned}\right\} \quad \text{I. + II.}$$

$43{,}2 = 2x$ /:2

$21{,}6 = x$

$36^2 = 21{,}6^2 + v^2$

$v = \sqrt{36^2 - 21{,}6^2} = 28{,}8$

$S = \frac{a+c}{2}.v = \frac{65+40}{2}.28{,}8 = 1\,512$