# Logaritmické rovnice

**D**. Rovnica je ***logaritmická***, ak neznámu obsahuje v argumente logaritmu.

Logaritmické funkcie sú prosté → každú funkčnú hodnotu (y-ovú) nadobudnú iba raz (buď je rastúca na celom definičnom obore, alebo je klesajúca). Práve toto využijeme pri riešení logaritmických rovníc.

**V**. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$

Ak dokážeme upraviť rovnicu tak, aby ostali na obidvoch stranách logaritmy s rovnakým základom, potom môžeme písať rovnosť argumentov – rovnica bude jednoduchšia, väčšinou už nie logaritmická.
Nakoľko logaritmické funkcie sú definované iba na množine kladných čísel, najprv musíme určiť podmienky, až potom môžeme začať upravovať rovnicu.

**P**. Samozrejme k úplnému riešeniu aj tohto typu rovníc (ku každému typu) patrí aj skúška správnosti.

príklad:

Riešte rovnicu: $\log_3 (x - 12) = 2$.

začíname s podmienkou

$x - 12 > 0 \qquad /+12$

$x > 12$

na pravej strane číslo vyjadríme ako logaritmus so základom 3 → argument dostaneme, ak základ logaritmu umocníme na číslo

$\log_3 (x - 12) = \log_3 3^2$

máme rovnosť logaritmov so spoločným základom ⇒ stačí písať rovnosť argumentov

$x - 12 = 9 \qquad /+12$

$x = 21$

Riešte rovnicu: $\log (x - 4) + \log (x + 3) = \log (5x + 4)$.

začíname s podmienkami

$x - 4 > 0 \qquad /+4$

$x > 4$

$x + 3 > 0 \qquad /-3$

$x > -3$

$5x + 4 > 0 \qquad /-4$

$5x > -4 \qquad /:5$

$x > \frac{-4}{5}$

najsilnejšia podmienka je $x > 4$: ak spĺňa tú, potom aj ostatné → stačí porovnať výsledok s touto podmienkou

$\log (x - 4) + \log (x + 3) = \log (5x + 4)$

na ľavej strane zlúčime do jedného logaritmu

$\log (x - 4).(x + 3) = \log (5x + 4)$

už stačí písať rovnosť argumentov

$(x - 4).(x + 3) = 5x + 4$

$x^2 + 3x - 4x - 12 = 5x + 4$

$x^2 - x - 12 = 5x + 4 \qquad /-5x - 4$

anulujeme kvadratickú rovnicu

$x^2 - 6x - 16 = 0$

rozložíme na súčin lineárnych činiteľov

$(x - 8)(x + 2) = 0$

$x - 8 = 0 \qquad\qquad x + 2 = 0$

$x_1 = 8 \qquad\qquad x_2 = -2$

druhý výsledok nevyhovuje podmienke

$x = 8$

Riešte rovnicu: $\frac{1-\log x}{1+\log x} = \sqrt{3}$.

začíname s podmienkami

$x > 0$

$1 + \log x \neq 0 \quad /-1$

$\log x \neq -1$

$\log x \neq \log 10^{-1}$

$x \neq 0{,}1$

$\frac{1-\log x}{1+\log x} = \sqrt{3} \quad /.(1 + \log x)$

odstránime zlomok

$1 - \log x = \sqrt{3}.(1 + \log x)$

$1 - \log x = \sqrt{3} + \sqrt{3}.\log x \quad /+\log x - \sqrt{3}$

separujeme členy: na jednu stranu členy obsahujúce log x a na druhú bez

$1 - \sqrt{3} = \sqrt{3}.\log x + \log x$

vyjmeme na pravej strane log x

$1 - \sqrt{3} = \log x\left(\sqrt{3} + 1\right) \quad /:\left(\sqrt{3} + 1\right)$

$\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \log x$

$\log x = \log 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}}$

$x = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}} = 0{,}539\,6$

vyhovuje podmienkam

$x = 0{,}539\,6$