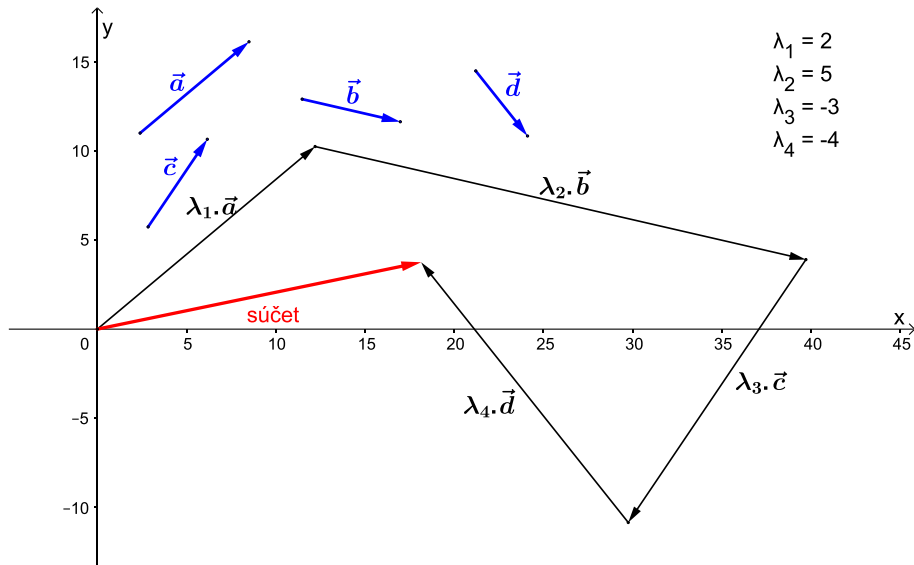


Lineárna kombinácia vektorov

Ak máme daných niekoľko vektorov, násobíme ich číslami a potom ich sčítame, hovoríme, že sme vytvorili jeden vektor *lineárnu kombináciu* tých daných (pri násobení číslom aj pri sčítavaní vznikne vektor \Rightarrow výsledkom je jeden vektor).



D. Nech sú dané vektory $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3; \dots; \vec{a}_n$. **Vektor \vec{k} je lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3; \dots; \vec{a}_n$,** ak k nim môžeme nájsť také reálne čísla $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \dots; \lambda_n, \in \mathbb{R}$, že:

$$\vec{k} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n.$$

príklad:

Zistite veľkosť lineárnych kombinácií vektorov: $\vec{a} = (2; -3); \vec{b} = (-5; 4); \vec{c} = (0; 2); \vec{d} = (1; 0)$.

$$a, \vec{e} = 4 \cdot \vec{a} + \vec{b} - 3 \cdot \vec{d} \qquad b, \vec{f} = 5 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} + \vec{c} \qquad c, \vec{g} = -3 \cdot \vec{a} + 4 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c} - 7 \cdot \vec{d}$$

$$a, \vec{e} = 4 \cdot (2; -3) + (-5; 4) - 3 \cdot (1; 0) = (8; -12) + (-5; 4) + (-3; 0) = (0; -8)$$

$$|\vec{e}| = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = \sqrt{0 + 64}$$

$$|\vec{e}| = 8$$

$$b, \vec{f} = 5 \cdot (2; -3) - 2 \cdot (-5; 4) + (0; 2) = (10; -15) + (10; -8) + (0; 2) = (20; -21)$$

$$|\vec{f}| = \sqrt{20^2 + (-21)^2} = \sqrt{400 + 441}$$

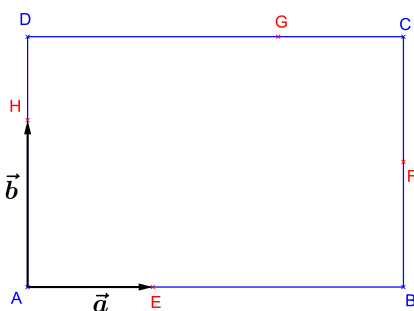
$$|\vec{f}| = 29$$

$$c, \vec{g} = -3 \cdot (2; -3) + 4 \cdot (-5; 4) + 2 \cdot (0; 2) - 7 \cdot (1; 0) = (-6; 9) + (-20; 16) + (0; 4) + (-7; 0) = (-33; 29)$$

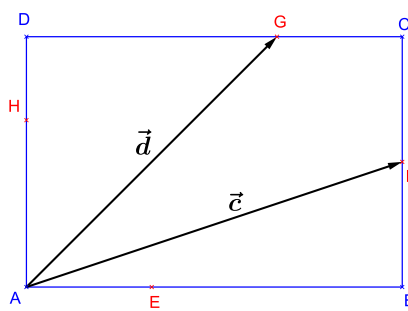
$$|\vec{g}| = \sqrt{(-33)^2 + 29^2} = \sqrt{1089 + 841}$$

$$|\vec{g}| = 43,932$$

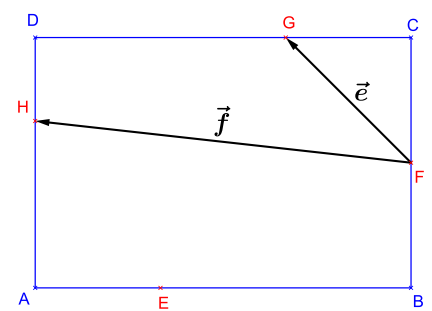
V obdĺžniku ABCD bod **E** leží v tretine strany AB bližšie k vrcholu A; **F** je stredom strany BC. Bod **G** leží v tretine strany CD bližšie k vrcholu C; bod **H** leží v tretine strany DA bližšie k vrcholu D. Vyjadrite vektory: $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{BF}, \vec{DG}, \vec{CG}, \vec{DH}, \vec{AF}, \vec{AG}, \vec{FG}, \vec{FH}$ pomocou vektorov:



$$a, \vec{a} = \vec{AE} \text{ a } \vec{b} = \vec{AH}$$



$$b, \vec{c} = \vec{AF} \text{ a } \vec{d} = \vec{AG}$$



$$c, \vec{e} = \vec{FG} \text{ a } \vec{f} = \vec{FH}$$

a,

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DG} = 2\vec{a}$$

$$\overrightarrow{CG} = -\vec{a}$$

$$\overrightarrow{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$$

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} = \frac{3}{4}\vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} - \left(3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} - 3\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} = \frac{3}{4}\vec{b} - 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{4}\vec{b} - 3\vec{a}$$

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AF} = \vec{b} - \left(3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \vec{b} - 3\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

\vec{a} je tretina strany AB \Rightarrow trojnásobok tretiny

\vec{b} je dve tretiny strany AD \Rightarrow 1,5 násobok dvoch tretín

polovica \overrightarrow{AD}

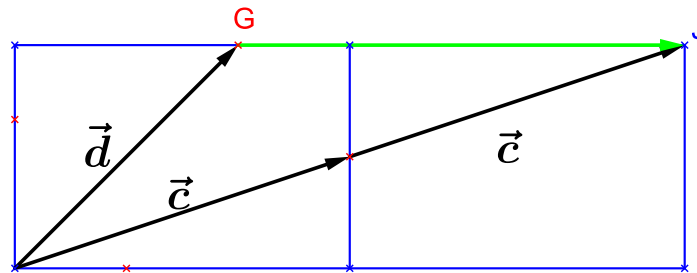
dve tretiny strany AB \Rightarrow dvojnásobok tretiny

opačný vektor k \vec{a}

opačný vektor k \vec{b} s polovičnou veľkosťou

b,

najprv vyjadríme vektory \vec{a} a \vec{b} pomocou \vec{c} a \vec{d} , a potom využijeme výsledky zo zadania a,



vektor \overrightarrow{GJ} má smer, ako vektor \vec{a} , ale veľkosť má štvornásobnú (tretina strany AB + celá strana AB)
 $\overrightarrow{GJ} = 2\vec{c} - \vec{d} \rightarrow \vec{a} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{4}(2\vec{c} - \vec{d}) = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}$

skúsme využiť výsledky z príkladu a, – eliminujme vektor \vec{b}

$$\vec{c} = \overrightarrow{AF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a}$$

$$\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad / \cdot 4$$

$$\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} \quad / \cdot (-2)$$

$$4\vec{c} = 12\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$-2\vec{d} = -3\vec{b} - 4\vec{a}$$

$$4\vec{c} - 2\vec{d} = 8\vec{a} \quad / : 8$$

$$\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d} = \vec{a}$$

algebraickou metódou sme dostali ten istý výsledok, ako graficky

teraz eliminujme vektor \vec{a}

$$\vec{c} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad / \cdot 2$$

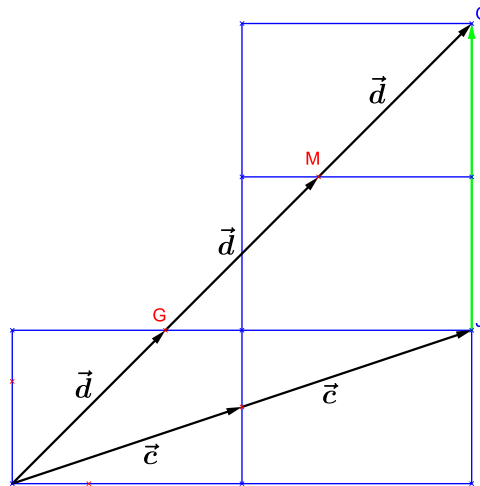
$$\vec{d} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} \quad / \cdot (-3)$$

$$2\vec{c} = 6\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$$

$$-3\vec{d} = -\frac{9}{2}\vec{b} - 6\vec{a}$$

$$2\vec{c} - 3\vec{d} = -3\vec{b} \quad / \cdot (-3)$$

$$-\frac{2}{3}\vec{c} + \vec{d} = \vec{b}$$



vektor \vec{OJ} má smer, ako vektor \vec{b} , ale veľkosť má trojnásobnú (dvakrát strana AD)
 $\vec{OJ} = 3\vec{d} - 2\vec{c} \rightarrow \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{OJ} = \frac{1}{3}(3\vec{d} - 2\vec{c}) = \vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}$
 grafickou metódou sme dostali ten istý výsledok, ako úpravami

teraz dosadíme do výrazov z bodu a,

$$\vec{AB} = 3\vec{a} = 3\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \frac{3}{2}\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{d}$$

$$\vec{AD} = \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{3}{2}\vec{d} - \vec{c}$$

$$\vec{BF} = \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{3}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{DG} = 2\vec{a} = 2\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\vec{CG} = -\vec{a} = -\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) = \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}$$

$$\vec{AF} = \vec{c}$$

$$\vec{AG} = \vec{d}$$

$$\vec{FG} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = -\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) + \frac{3}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{d} + \frac{3}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} = -\vec{c} + \vec{d}$$

na obrázku vidíme, že vektor \vec{FG} je spojnica koncových bodov vektorov \vec{c} a $\vec{d} \Rightarrow$ je to rozdiel tých vektorov – koncový bod je menšenec, začiatočný je menšiteľ: $\vec{d} - \vec{c}$

$$\vec{FH} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = -3\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right) + \frac{1}{4}\left(\vec{d} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) = -\frac{3}{2}\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{d} + \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{6}\vec{c} = \vec{d} - \frac{5}{3}\vec{c}$$

c,

aj teraz vyjadríme vektory \vec{a} a \vec{b} , teraz pomocou \vec{e} a \vec{f} , a potom využijeme výsledky zo zadania a, znovu využijeme výsledky z príkladu a, – eliminujeme vektor \vec{b}

$$\vec{e} = \vec{FG} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

$$\vec{f} = \vec{FH} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\vec{e} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad / \cdot 4$$

$$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \quad / \cdot (-12)$$

$$4\vec{e} = -4\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$-12\vec{f} = 36\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$4\vec{e} - 12\vec{f} = 32\vec{a} \quad / : 32$$

$$\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f} = \vec{a}$$

druhýkrát eliminujeme vektor \vec{a}

$$\vec{e} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \quad / \cdot (-3)$$

$$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$-3\vec{e} = 3\vec{a} - \frac{9}{4}\vec{b}$$

$$\vec{f} = -3\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$-3\vec{e} + \vec{f} = -2\vec{b} \quad / : (-2)$$

$$\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f} = \vec{b}$$

$$\overline{AB} = 3\vec{a} = 3\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{e} - \frac{9}{8}\vec{f}$$

$$\overline{AD} = \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{9}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f}$$

$$\overline{BF} = \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{9}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}$$

$$\overline{DG} = 2\vec{a} = 2\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{1}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f}$$

$$\overline{CG} = -\vec{a} = -\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{f} - \frac{1}{8}\vec{e}$$

$$\overline{DH} = -\frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{1}{4}\vec{f} - \frac{3}{4}\vec{e}$$

$$\overline{AF} = 3\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = 3\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) = \frac{3}{8}\vec{e} - \frac{9}{8}\vec{f} + \frac{9}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f} = \frac{3}{2}\vec{e} - \frac{3}{2}\vec{f}$$

$$\overline{AG} = \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{a} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\vec{e} - \frac{1}{2}\vec{f}\right) + 2\left(\frac{1}{8}\vec{e} - \frac{3}{8}\vec{f}\right) = \frac{9}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f} + \frac{1}{4}\vec{e} - \frac{3}{4}\vec{f} = \frac{5}{2}\vec{e} - \frac{3}{2}\vec{f}$$

$$\overline{FG} = \vec{e}$$

$$\overline{FH} = \vec{f}$$

Vyjadrite vektor \vec{k} ako lineárnu kombináciu ostatných vektorov:

a, $\vec{k}(3; -5)$; $\vec{a}(-2; 1)$; $\vec{b}(-3; -2)$

b, $\vec{k}(1; 1)$; $\vec{c}(3; -4)$; $\vec{d}(1; 2)$

c, $\vec{k}(-7; 10)$; $\vec{e}(5; 3)$; $\vec{f}(-2; 3)$

d, $\vec{k}(-2; -6)$; $\vec{g}(6; 2)$; $\vec{h}(-1; 1)$

a, $\exists \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{k} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$

$$\vec{k} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = \lambda_1 \cdot (-2; 1) + \lambda_2 \cdot (-3; -2) = (-2\lambda_1; \lambda_1) + (-3\lambda_2; -2\lambda_2) = (-2\lambda_1 - 3\lambda_2; \lambda_1 - 2\lambda_2)$$

$$(3; -5) = (-2\lambda_1 - 3\lambda_2; \lambda_1 - 2\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ -5 = \lambda_1 - 2\lambda_2 \end{cases}$$

$$3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2$$

$$\underline{-5 = \lambda_1 - 2\lambda_2} \quad / \cdot 2$$

$$3 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2$$

$$\underline{-10 = 2\lambda_1 - 4\lambda_2} \quad / \cdot I. + II.$$

$$\underline{-7 = -7\lambda_2} \quad / : (-7)$$

$$\underline{1 = \lambda_2}$$

$$\underline{-5 = \lambda_1 - 2 \cdot 1} \quad / + 2$$

$$\underline{-3 = \lambda_1}$$

$$\vec{k} = -3\vec{a} + 1\vec{b}$$

b, $\exists \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{k} = \lambda_1 \vec{c} + \lambda_2 \vec{d}$

$$\vec{k} = \lambda_1 \vec{c} + \lambda_2 \vec{d} = \lambda_1 \cdot (3; -4) + \lambda_2 \cdot (1; 2) = (3\lambda_1; -4\lambda_1) + (\lambda_2; 2\lambda_2) = (3\lambda_1 + \lambda_2; -4\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

$$(1; 1) = (3\lambda_1 + \lambda_2; -4\lambda_1 + 2\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

$$1 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \quad / \cdot (-2)$$

$$\underline{1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2}$$

$$\underline{-2 = -6\lambda_1 - 2\lambda_2}$$

$$\underline{1 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2} \quad / \cdot I. + II.$$

$$\underline{-1 = -10\lambda_1} \quad / : (-10)$$

$$\underline{\frac{1}{10} = \lambda_1}$$

$$1 = 3 \cdot \frac{1}{10} + \lambda_2 \quad / - \frac{3}{10}$$

$$\frac{7}{10} = \lambda_2$$

$$\vec{k} = \frac{1}{10} \vec{c} + \frac{7}{10} \vec{d}$$

c, $\exists \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{k} = \lambda_1 \cdot \vec{e} + \lambda_2 \cdot \vec{f}$

$$\vec{k} = \lambda_1 \cdot \vec{e} + \lambda_2 \cdot \vec{f} = \lambda_1 \cdot (5; 3) + \lambda_2 \cdot (-2; 3) = (5\lambda_1; 3\lambda_1) + (-2\lambda_2; 3\lambda_2) = (5\lambda_1 - 2\lambda_2; 3\lambda_1 + 3\lambda_2)$$

$$(-7; 10) = (5\lambda_1 - 2\lambda_2; 3\lambda_1 + 3\lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 10 = 3\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -7 = 5\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 10 = 3\lambda_1 + 3\lambda_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} /.3 \\ /.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -21 = 15\lambda_1 - 6\lambda_2 \\ 20 = 6\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} /.2 \\ /.2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -21 = 15\lambda_1 - 6\lambda_2 \\ 20 = 6\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{array} \quad \text{/I. + II.}$$

$$\begin{array}{r} -1 = 21\lambda_1 \\ -1 = 21\lambda_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} /:21 \\ /:21 \end{array}$$

$$-\frac{1}{21} = \lambda_1$$

$$-7 = 5 \cdot \left(-\frac{1}{21}\right) - 2\lambda_2$$

$$-\frac{142}{21} = -2\lambda_2 \quad /:(-2)$$

$$\frac{71}{21} = \lambda_2$$

$$\vec{k} = \frac{1}{21} \vec{e} + \frac{71}{21} \vec{f}$$

d, $\exists \lambda_1; \lambda_2 \in \mathbb{R}: \vec{k} = \lambda_1 \cdot \vec{g} + \lambda_2 \cdot \vec{h}$

$$\vec{k} = \lambda_1 \cdot \vec{g} + \lambda_2 \cdot \vec{h} = \lambda_1 \cdot (6; 2) + \lambda_2 \cdot (-1; 1) = (6\lambda_1; 2\lambda_1) + (-1\lambda_2; \lambda_2) = (6\lambda_1 - \lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$(-2; -6) = (6\lambda_1 - \lambda_2; 2\lambda_1 + \lambda_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 6\lambda_1 - \lambda_2 \\ -6 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -2 = 6\lambda_1 - \lambda_2 \\ -6 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} /I. + II. \\ /:8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -8 = 8\lambda_1 \\ -1 = \lambda_1 \end{array} \quad \begin{array}{l} /:8 \\ /:8 \end{array}$$

$$-1 = \lambda_1$$

$$-6 = 2 \cdot (-1) + \lambda_2$$

$$-4 = \lambda_2$$

$$\vec{k} = -\vec{g} - 4\vec{h}$$