

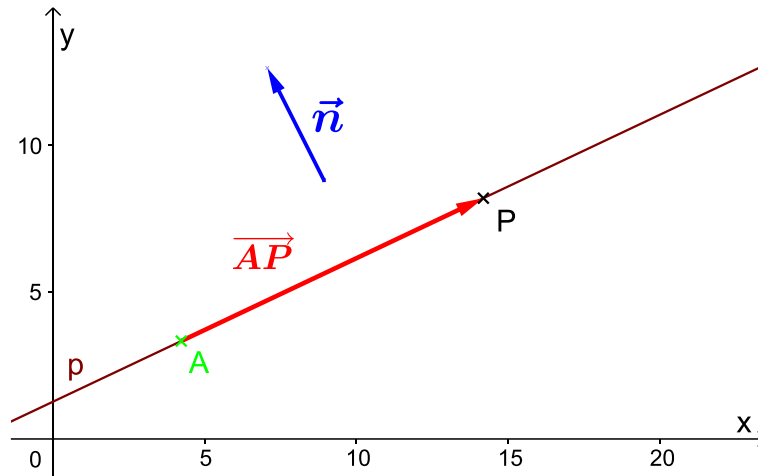
Všeobecná rovnica priamky

Aby sme mohli napísať všeobecnú rovnicu priamky potrebujeme poznať **normálový vektor priamky** a **bod tej priamky**.

Daná je priamka p normálovým vektorom \vec{n}_p a bodom A :

$$\vec{n}_p (n_1; n_2), A(x_0; y_0)$$

Umiestnime priamku do súradnicovej sústavy. Vyznačme na priamke ďalší, všeobecný bod $P(x; y)$.



Využijeme kolmosť vektorov – práve vtedy sú kolmé, ak ich skalárny súčin sa rovná nule. Napíšme skalárny súčin vektor \vec{AP} a \vec{n}_p :

vypočítame súradnice vektora \vec{AP} – koncový bod mínus začiatkový:

$$\vec{AP} = P - A = (x; y) - (x_0; y_0) = (x - x_0; y - y_0)$$

napíšeme skalárny súčin a upravíme:

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{n}_p &= (x - x_0; y - y_0) \cdot (n_1; n_2) = (x - x_0) \cdot n_1 + (y - y_0) \cdot n_2 = x \cdot n_1 - x_0 \cdot n_1 + y \cdot n_2 - y_0 \cdot n_2 = \\ &= n_1 \cdot x + n_2 \cdot y - n_1 \cdot x_0 - n_2 \cdot y_0 \end{aligned}$$

$n_1; n_2; x_0; y_0$ sú dané, známe čísla \rightarrow posledné dva členy sú čísla

označme súčet tých dvoch členov písmenom c

$$c = -n_1 \cdot x_0 - n_2 \cdot y_0$$

dosadíme do skalárneho súčinu:

$$\vec{AP} \cdot \vec{n}_p = n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + c$$

keďže vektory práve vtedy budú kolmé, ak tento súčin sa rovná nule \rightarrow dostaneme všeobecnú rovnicu priamky p

Všeobecná rovnica priamky p má tvar:

$$p: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + c = 0 \quad c \in \mathbb{R}$$

kde konštantu c vypočítame dosadením známeho bodu priamky do rovnice

$$c = -n_1 \cdot x_0 - n_2 \cdot y_0$$

P. Všeobecné rovnice geometrických útvarov (priamky, kružnice, elipsy, ...) majú určitý tvar. Sú tak upravené, aby na jednej strane rovnice stála nula (anulovaná), neobsahovala žiadne zlomky alebo zátvorky.

príklad:

Daná je priamka normálovým vektorom \vec{n} a bodom. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky:

a, a: $\vec{n}_a = (-2; 4); A = (-1; 3)$

b, b: $\vec{n}_b = (3; -5); B = (-1; 2)$

c, c: $\vec{n}_c = (0; 3); C = (10; -4)$

d, d: $\vec{n}_d = (1; 0); D = (7; 6)$

napíšeme predbežný tvar všeobecnej rovnice priamky

a: $-2 \cdot x + 4 \cdot y + c = 0$

chýbajúcu konštantu vypočítame dosadením daného bodu

$$-2 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 + c = 0$$

$$2 + 12 + c = 0$$

$$14 + c = 0$$

/-14

$$c = -14$$

$$\mathbf{a: -2x + 4y - 14 = 0}$$

$$\mathbf{b: 3x - 5y + c = 0}$$

$$3 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + c = 0$$

$$-3 - 10 + c = 0$$

$$-13 + c = 0$$

$$/+13$$

$$c = 13$$

$$\mathbf{b: 3x - 5y + 13 = 0}$$

$$\mathbf{c: 0x + 3y + c = 0}$$

$$0 \cdot 10 + 3 \cdot (-4) + c = 0$$

$$-12 + c = 0$$

$$/+12$$

$$c = 12$$

$$\mathbf{c: 3y + 12 = 0}$$

$$\mathbf{d: 1x + 0y + c = 0}$$

$$1 \cdot 7 + 0 \cdot 6 + c = 0$$

$$7 + c = 0$$

$$/-7$$

$$c = -7$$

$$\mathbf{d: x - 7 = 0}$$

Daná je priamka dvoma bodmi. Napíšte jej všeobecnú rovnicu.

$$\mathbf{a, a: A(3; -4), B(6; 2)}$$

$$\mathbf{b, b: C(-2; -8), D(5; 1)}$$

$$\mathbf{c, c: E(9; 7), F(-2; 5)}$$

$$\mathbf{d, d: G(8; 3), H(-3; -7)}$$

$$\vec{s}_a = \overrightarrow{AB} = B - A = (3; 6) \sim (1; 2)$$

$$\vec{n}_a \perp \vec{s}_a \Rightarrow \vec{n}_a = (2; -1)$$

napišeme predbežný tvar všeobecnej rovnice

$$\mathbf{a: 2x - 1y + c = 0}$$

dosadíme jeden z daných bodov

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) + c = 0$$

$$6 + 4 + c = 0$$

$$10 + c = 0$$

$$/-10$$

$$c = \mathbf{-10}$$

skúsme aj druhý bod

$$2 \cdot 6 - 1 \cdot 2 + c = 0$$

$$12 - 2 + c = 0$$

$$10 + c = 0$$

$$/-10$$

$$c = \mathbf{-10}$$

P. Dosadením hociktorého bodu priamky dostaneme tú istú hodnotu pre konštantu c.

$$\mathbf{a: 2x - y - 10 = 0}$$

$$\vec{s}_b = \overrightarrow{CD} = D - C = (7; 9)$$

$$\vec{n}_b \perp \vec{s}_b \Rightarrow \vec{n}_b = (9; -7)$$

$$\mathbf{b: 9x - 7y + c = 0}$$

$$9 \cdot 5 - 7 \cdot 1 + c = 0$$

$$45 - 7 + c = 0$$

$$38 + c = 0$$

$$/-38$$

$$c = -38$$

$$\mathbf{b: 9x - 7y - 38 = 0}$$

$$\vec{s}_c = \overrightarrow{EF} = F - E = (-11; -2)$$

$$\vec{n}_c \perp \vec{s}_c \Rightarrow \vec{n}_c = (2; -11)$$

$$\mathbf{c: 2x - 11y + c = 0}$$

$$2 \cdot (-2) - 11 \cdot 5 + c = 0$$

$$-4 - 55 + c = 0$$

$$-59 + c = 0$$

$$/+59$$

$$c = 59$$

$$c: 2x - 11y + 59 = 0$$

$$\vec{s}_d = \overline{GH} = H - G = (-11; -10)$$

$$\vec{n}_d \perp \vec{s}_d \Rightarrow \vec{n}_d = (10; -11)$$

$$d: 10x - 11y + c = 0$$

$$10 \cdot 8 - 11 \cdot 3 + c = 0$$

$$80 - 33 + c = 0$$

$$47 + c = 0$$

/-47

$$c = -47$$

$$d: 10x - 11y - 47 = 0$$

Daná je priamka všeobecnou rovnicou. Určte normálový vektor priamky a bod tej priamky.

$$a, a: 5x + 4y - 10 = 0$$

$$b, b: 2x - 7y + 1 = 0$$

$$c, c: -3x - 5 = 0$$

$$d, d: 2y - 6 = 0$$

$$\vec{n}_a = (5; 4)$$

bod priamky tak určíme, že jednu súradnicu si zvolíme, a druhú vypočítame dosadením do rovnice samozrejme si zvolíme malé celé číslo: 0; 1; -1; 2; -2

$$A \in a \rightarrow A(2; y_A)$$

$$5 \cdot 2 + 4 \cdot y_A - 10 = 0$$

$$10 + 4y_A - 10 = 0$$

$$4y_A = 0$$

/:4

$$y_A = 0$$

$$A(2; 0)$$

$$\vec{n}_b = (2; -7)$$

$$B \in b \rightarrow B(x_B; 1)$$

$$2 \cdot x_B - 7 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$2x_B - 7 + 1 = 0$$

$$2x_B - 6 = 0$$

/+6

$$2x_B = 6$$

/:2

$$x_B = 3$$

$$B(3; 1)$$

$$\vec{n}_c = (-3; 0)$$

$$C \in c \rightarrow C(x_C; 1)$$

$$-3 \cdot x_C - 5 = 0$$

/+5

$$-3x_C = 5$$

/:(-3)

$$x_C = -\frac{5}{3}$$

$$C\left(-\frac{5}{3}; 1\right)$$

P. Keby sme si zvolili x-ovú súradnicu bodu C, dostali by sme nepravdu:

$$C(1; y_C)$$

$$-3 \cdot 1 - 5 = 0$$

$$-3 - 5 = 0$$

$$-8 \neq 0$$

To znamená, že bod na priamke s takou x-ovou súradnicou neexistuje.

P. Pri rovniciach, kde chýba jedna súradnica (chýba z rovnice x alebo y), iba tú chýbajúcu súradnicu si môžeme zvoliť \rightarrow tá druhá je už určená rovnicou. Tieto priamky majú špeciálnu polohu: sú rovnobežné s x-ovou alebo s y-ovou osou.

$$\vec{n}_d = (0; 2)$$

$$D \in d \rightarrow d(1; y_D)$$

$$2 \cdot y_D - 6 = 0$$

/+6

$$2y_D = 6$$

/:2

$$y_D = 3$$

$$D(1; 3)$$

Daná je priamka e všeobecnou rovnicou. Ktorý z bodov leží na priamke?

$$e: 4x - 3y + 2 = 0$$

$$A(-2; -2)$$

$$B(1; 2)$$

$$C(0; 3)$$

$$D(4; 6)$$

$$E(-1; 1)$$

dosadíme súradnice bodu do rovnice \rightarrow ak platí rovnosť, bod leží na priamke

$$4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2) + 2 = 0$$

$$-8 + 6 + 2 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow A \in e$$

$$4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$$

$$4 - 6 + 2 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow B \in e$$

$$4 \cdot 0 - 3 \cdot 3 + 2 = 0$$

$$0 - 9 + 2 = 0$$

$$-7 \neq 0 \Rightarrow C \notin e$$

$$4 \cdot 4 - 3 \cdot 6 + 2 = 0$$

$$16 - 18 + 2 = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow D \in e$$

$$4 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

$$-4 - 3 + 2 = 0$$

$$-5 \neq 0 \Rightarrow E \notin e$$

Určte chýbajúcu súradnicu bodu tak, aby ležal na priamke.

a, $A(x_A; 2)$, a: $x - 2y + 5 = 0$

b, $B(x_B; -5)$, b: $-3x + 4y + 2 = 0$

c, $C(11; y_C)$, c: $-2x + 5y - 3 = 0$

d, $D(7; y_D)$, d: $5x - 9y - 8 = 0$

dosadíme súradnicu bodu do rovnice \rightarrow chýbajúcu vypočítame

$$x_A - 2 \cdot 2 + 5 = 0$$

$$x_A - 4 + 5 = 0$$

$$x_A + 1 = 0$$

/-1

$$x_A = -1$$

$$A(-1; 2)$$

$$-3 \cdot x_B + 4 \cdot (-5) + 2 = 0$$

$$-3x_B - 20 + 2 = 0$$

$$-3x_B - 18 = 0$$

/+18

$$-3x_B = 18$$

/:(-3)

$$x_B = -6$$

$$B(-6; -5)$$

$$-2 \cdot 11 + 5 \cdot y_C - 3 = 0$$

$$-22 + 5y_C - 3 = 0$$

$$-25 + 5y_C = 0$$

/+25

$$5y_C = 25$$

/:5

$$y_C = 5$$

$$C(11; 5)$$

$$5 \cdot 7 - 9 \cdot y_D - 8 = 0$$

$$35 - 9y_D - 8 = 0$$

$$27 - 9y_D = 0$$

/-27

$$-9y_D = -27$$

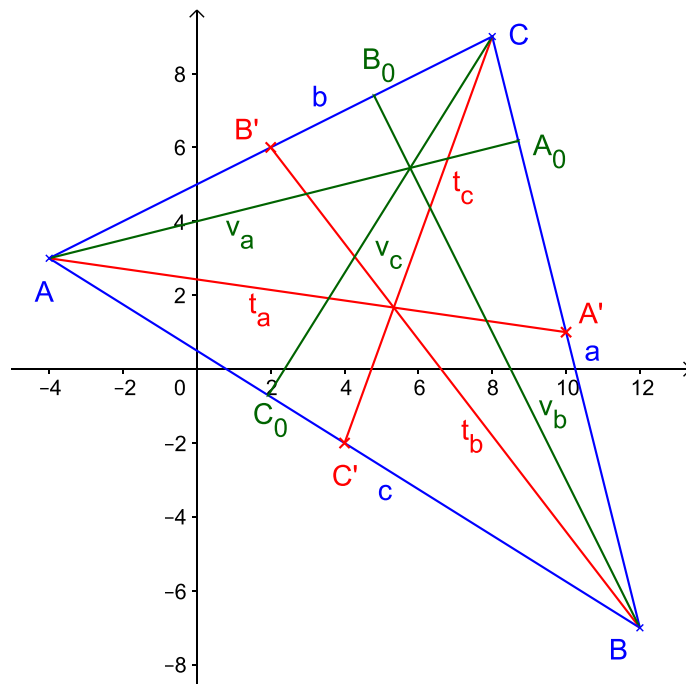
/:(-9)

$$y_D = 3$$

$$D(7; 3)$$

Daný je trojuholník ABC. Napíšte všeobecné rovnice strán, ťažníc a výšok.

$$A(-4; 3), B(12; -7), C(8; 9)$$



a: BC

$$\vec{s}_a = \overrightarrow{BC} = C - B = (-4; 16) \sim (-1; 4)$$

$$\vec{n}_a \perp \vec{s}_a \Rightarrow \vec{n}_a = (4; 1)$$

$$\text{a: } 4x + 1y + c = 0$$

$$C \in \text{a}$$

$$4 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + c = 0$$

$$32 + 9 + c = 0$$

$$41 + c = 0$$

$$/-41$$

$$c = -41$$

$$\text{a: } 4x + y - 41 = 0$$

b: AC

$$\vec{s}_b = \overrightarrow{AC} = C - A = (12; 6) \sim (2; 1)$$

$$\vec{n}_b \perp \vec{s}_b \Rightarrow \vec{n}_b = (1; -2)$$

$$\text{b: } 1x - 2y + c = 0$$

$$A \in \text{b}$$

$$1 \cdot (-4) - 2 \cdot 3 + c = 0$$

$$-4 - 6 + c = 0$$

$$-10 + c = 0$$

$$/+10$$

$$c = 10$$

$$\text{b: } x - 2y + 10 = 0$$

c: AB

$$\vec{s}_c = \overrightarrow{AB} = B - A = (16; -10) \sim (8; -5)$$

$$\vec{n}_c \perp \vec{s}_c \Rightarrow \vec{n}_c = (5; 8)$$

$$\text{c: } 5x + 8y + c = 0$$

$$A \in \text{c}$$

$$5 \cdot (-4) + 8 \cdot 3 + c = 0$$

$$-20 + 24 + c = 0$$

$$4 + c = 0$$

$$/-4$$

$$c = -4$$

$$\text{c: } 5x + 8y - 4 = 0$$

t_a: AA'

$$A' = \frac{B+C}{2} = (10; 1)$$

$$\vec{s}_{t_a} = \overrightarrow{AA'} = A' - A = (14; -2) \sim (7; -1)$$

$$\vec{n}_{t_a} \perp \vec{s}_{t_a} \Rightarrow \vec{n}_{t_a} = (1; 7)$$

$$\begin{aligned}
\text{ta: } & 1.x + 7.y + c = 0 \\
& A \in \text{ta} \\
& 1.(-4) + 7.3 + c = 0 \\
& -4 + 21 + c = 0 \\
& 17 + c = 0 \quad \quad \quad /-17 \\
& c = -17
\end{aligned}$$

$$\text{ta: } x + 7y - 17 = 0$$

tb: BB'

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}' &= \frac{A+C}{2} = (2; 6) \\
\vec{s}_{\text{tb}} &= \vec{BB}' = \mathbf{B}' - \mathbf{B} = (-10; 13) \\
\vec{n}_{\text{tb}} \perp \vec{s}_{\text{tb}} &\Rightarrow \vec{n}_{\text{tb}} = (13; 10) \\
\text{tb: } & 13.x + 10.y + c = 0 \\
& B' \in \text{tb} \\
& 13.2 + 10.6 + c = 0 \\
& 26 + 60 + c = 0 \\
& 86 + c = 0 \quad \quad \quad /-86 \\
& c = -86
\end{aligned}$$

$$\text{tb: } 13x + 10y - 86 = 0$$

tc: CC'

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}' &= \frac{A+B}{2} = (4; -2) \\
\vec{s}_{\text{tc}} &= \vec{CC}' = \mathbf{C}' - \mathbf{C} = (-4; -11) \\
\vec{n}_{\text{tc}} \perp \vec{s}_{\text{tc}} &\Rightarrow \vec{n}_{\text{tc}} = (11; -4) \\
\text{tc: } & 11.x - 4.y + c = 0 \\
& C' \in \text{tc} \\
& 11.4 - 4.(-2) + c = 0 \\
& 44 + 8 + c = 0 \\
& 52 + c = 0 \quad \quad \quad /-52 \\
& c = -52
\end{aligned}$$

$$\text{tc: } 11x - 4y - 52 = 0$$

Va: AA₀

$$\begin{aligned}
\vec{n}_{\text{va}} \perp \vec{n}_a &\Rightarrow \vec{n}_{\text{va}} = (1; -4) \\
\text{va: } & 1.x - 4.y + c = 0 \\
& A \in \text{va} \\
& 1.(-4) - 4.3 + c = 0 \\
& -4 - 12 + c = 0 \\
& -16 + c = 0 \quad \quad \quad /+16 \\
& c = 16
\end{aligned}$$

$$\text{va: } x - 4y + 16 = 0$$

Vb: BB₀

$$\begin{aligned}
\vec{n}_{\text{vb}} \perp \vec{n}_b &\Rightarrow \vec{n}_{\text{vb}} = (2; 1) \\
\text{vb: } & 2.x + 1.y + c = 0 \\
& B \in \text{vb} \\
& 2.12 + 1.(-7) + c = 0 \\
& 24 - 7 + c = 0 \\
& 17 + c = 0 \quad \quad \quad /-17 \\
& c = -17
\end{aligned}$$

$$\text{vb: } 2x + y - 17 = 0$$

Vc: CC₀

$$\begin{aligned}
\vec{n}_{\text{vc}} \perp \vec{n}_c &\Rightarrow \vec{n}_{\text{vc}} = (8; -5) \\
\text{vc: } & 8.x - 5.y + c = 0 \\
& C \in \text{vc}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \cdot 8 - 5 \cdot 9 + c &= 0 \\
64 - 45 + c &= 0 \\
19 + c &= 0 & /-19 \\
c &= -19
\end{aligned}$$

$$v_c: 8x - 5y - 19 = 0$$

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza daným bodom a je rovnobežná s danou priamkou:

a, A(5; 6), a: $2x - 3y + 12 = 0$ b, B(3; -1), b: $8x + 5y - 7 = 0$

- ak priamky sú rovnobežné, ich normálové vektory sú takisto rovnobežné \Rightarrow môžu byť aj rovnaké
- preto všeobecná rovnica rovnobežnej priamky môže sa líšiť iba v konštante c – koeficienty x a y (súradnice normálového vektora) môžu ostať
- môže sa líšiť aj v normálovom vektore (v koeficientoch) – normálový vektor je násobkom druhého

$$\begin{aligned}
r_a: 2x - 3y + c &= 0 \\
2 \cdot 5 - 3 \cdot 6 + c &= 0 \\
10 - 18 + c &= 0 \\
-8 + c &= 0 & /+8 \\
c &= 8
\end{aligned}$$

$$r_a: 2x - 3y + 8 = 0$$

$$\begin{aligned}
r_b: 8x + 5y + c &= 0 \\
8 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) + c &= 0 \\
24 - 5 + c &= 0 \\
19 + c &= 0 & /-19 \\
c &= -19
\end{aligned}$$

$$r_b: 8x + 5y - 19 = 0$$

Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza daným bodom a je kolmá na danú priamku:

a, C(4; 3), c: $6x - 4y - 5 = 0$ b, D(-5; 7), d: $3x + 9y - 2 = 0$

- ak priamky sú kolmé, ich normálové vektory sú takisto kolmé

$$\begin{aligned}
\vec{n}_c &= (6; -4) \\
\vec{n}_{k_c} \perp \vec{n}_c &\Rightarrow \vec{n}_{k_c} = (4; 6) \sim (2; 3) \\
k_c: 2x + 3y + c &= 0 \\
2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + c &= 0 \\
8 + 9 + c &= 0 \\
17 + c &= 0 & /-17 \\
c &= -17
\end{aligned}$$

$$k_c: 2x + 3y - 17 = 0$$

$$\begin{aligned}
\vec{n}_d &= (3; 9) \\
\vec{n}_{k_d} \perp \vec{n}_d &\Rightarrow \vec{n}_{k_d} = (9; -3) \sim (3; -1) \\
k_d: 3x - 1y + c &= 0 \\
3 \cdot (-5) - 1 \cdot 7 + c &= 0 \\
-15 - 7 + c &= 0 \\
-22 + c &= 0 & /+22 \\
c &= 22
\end{aligned}$$

$$k_d: 3x - y + 22 = 0$$