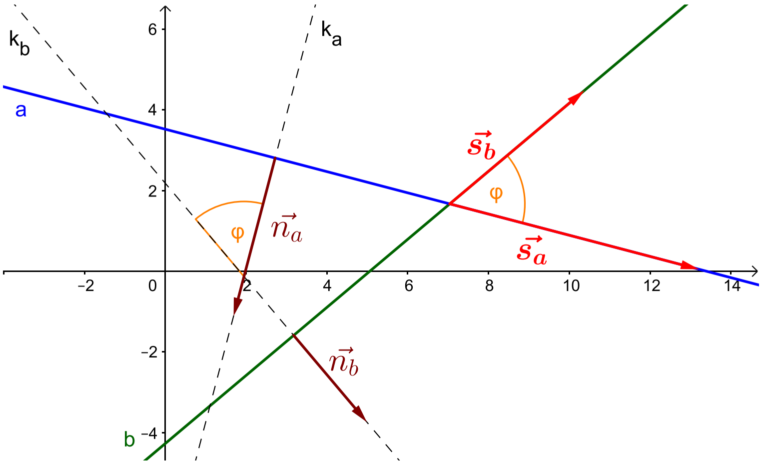
Uhol priamok

Štandardne uhol (odchýlka) priamok je definovaný pre rôznobežné priamky. Zvykneme ale rozšíriť aj pre ostatné možné vzájomné polohy priamok: totožné a rovnobežné priamky, ktoré podľa tohto rozšírenia zvierajú 0 stupňový uhol (keďže pracujeme v rovine, štvrtá vzájomná poloha – mimobežné – tu nepríde do úvahy). Čiže po rozšírení pojmu uhla dvoch priamok, táto hodnota je z uzavretého intervalu:

$$\varphi = \in \langle 0°; 90° \rangle$$

Priamky v analytickej geometrii sú dané rovnicami. Hoci my poznáme iba tri rôzne typy rovníc priamky (parametrickú, všeobecnú a smernicovú), ale sú aj ďalšie, alebo priamka môže byť určená aj takou rovnicou, čo nemá názov. V takomto prípade upravme skôr tú rovnicu, aby sme mohli prečítať z toho tvaru vektor tej priamky (parametrická → smerový; všeobecná → normálový), alebo smernicu (a zo smernice smerový vektor napísať).



V analytickej geometrii samozrejme uhol počítame pomocou vektorov. Uhol priamok je totožný (ak máme správne smerované vektory – čo pri vektoroch určených z rovníc nemusí byť) s uhlom ich smerových a takisto s uhlom ich normálových vektorov.

$$\measuredangle ab \cong (\measuredangle \vec{s_a}\,\vec{s_b} \vee 180° - \measuredangle \vec{s_a}\,\vec{s_b}) \cong (\measuredangle \vec{n_a}\,\vec{n_b} \vee 180° - \measuredangle \vec{n_a}\,\vec{n_b})$$

Vieme, že odchýlka dvoch vektorov môže byť aj tupý uhol, dokonca aj priamy (180°). Preto ak ten uhol vektorov vychádza na väčšiu hodnotu ako 90°, potom uhol priamok bude výplnkovým uhlom (180° – φ) vypočítaného uhla.

Ako by sme to mohli zjednodušiť, aby sme nemuseli zvlášť počítať ten výplnkový uhol?
Z vlastností funkcie kosínus (lebo vzorec na výpočet odchýlky dvoch vektorov obsahuje kosínus hľadaného uhla) vieme, že tupé uhly nadobúdajú záporné kosínusové hodnoty, kým ostré uhly kladné. Ak upravíme vo vzorci čitateľ (skalárny súčin vektorov) tak, aby vždy bol nezáporný (kladný alebo nula), potom z toho dostaneme ostrý uhol (alebo pravý, alebo nulový).

P. Vo vzorci v menovateli je súčin veľkostí vektorov, čo nikdy nebude záporný. Takže znamienko podielu závisí iba od znamienka čitateľa.

Máme takú funkciu, ktorú poznáme z prvého ročníka, čo urobí z ľubovoľného čísla nezápornú hodnotu. Je to absolútna hodnota. Takže upravený vzťah vyzerá takto:

V. $$\cos\varphi = \frac{|\vec{s_a}.\vec{s_b}|}{|\vec{s_a}|.|\vec{s_b}|} = \frac{|\vec{n_a}.\vec{n_b}|}{|\vec{n_a}|.|\vec{n_b}|}$$

$$\cos\varphi = \frac{|s_{a_1}.s_{b_1}+s_{a_2}.s_{b_2}|}{\sqrt{s_{a_1}^2+s_{a_2}^2}.\sqrt{s_{b_1}^2+s_{b_2}^2}} = \frac{|n_{a_1}.n_{b_1}+n_{a_2}.n_{b_2}|}{\sqrt{n_{a_1}^2+n_{a_2}^2}.\sqrt{n_{b_1}^2+n_{b_2}^2}}$$

príklad:

Vypočítajte odchýlku daných priamok:

a, a: $3x + 2y - 4 = 0$ b: $4x - 3y + 1 = 0$

b, c: $x = 7 - 7t$ d: $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$
$y = 2 + 3t$

c, e: $x = 3 + t$
$\quad\ \ y = -1 - 4t$

f: $2x + 8 = 0$

d, g: $2x = 5 + 4y$

h: $y = -\frac{5}{3}x - \frac{2}{3}$

a, $\overrightarrow{n_a} = (3; 2)$; $\overrightarrow{n_b} = (4; -3)$

$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{n_a}.\overrightarrow{n_b}|}{|\overrightarrow{n_a}|.|\overrightarrow{n_b}|} = \frac{|n_{a_1}.n_{b_1}+n_{a_2}.n_{b_2}|}{\sqrt{n_{a_1}^2+n_{a_2}^2}.\sqrt{n_{b_1}^2+n_{b_2}^2}} = \frac{|3.4+2.(-3)|}{\sqrt{3^2+2^2}.\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|12-6|}{\sqrt{9+4}.\sqrt{16+9}} = \frac{|6|}{5\sqrt{13}} = \frac{6}{5\sqrt{13}} = 0{,}332\ 8$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}332\ 8 = 70°33'36''$

---

b, $\overrightarrow{s_c} = (-7; 3)$; $k_d = \frac{4}{5} \longrightarrow \overrightarrow{s_d} = (5; 4)$

$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{s_c}.\overrightarrow{s_d}|}{|\overrightarrow{s_c}|.|\overrightarrow{s_d}|} = \frac{|s_{c_1}.s_{d_1}+s_{c_2}.s_{d_2}|}{\sqrt{s_{c_1}^2+s_{c_2}^2}.\sqrt{s_{d_1}^2+s_{d_2}^2}} = \frac{|-7.5+3.4|}{\sqrt{(-7)^2+3^2}.\sqrt{5^2+4^2}} = \frac{|-35+12|}{\sqrt{49+9}.\sqrt{25+16}} = \frac{|-23|}{\sqrt{58.41}} = \frac{23}{\sqrt{2\ 378}} = 0{,}471\ 7$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}471\ 7 = 61°51'30''$

---

c, $\overrightarrow{s_e} = (1; -4)$; $\overrightarrow{n_f} = (2; 0) \longrightarrow \overrightarrow{s_f} = (0; 2) \sim (0; 1)$

$\cos\varphi = \frac{|1.0+(-4).1|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}.\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|0-4|}{\sqrt{1+16}.\sqrt{0+1}} = \frac{|-4|}{\sqrt{17}.\sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = 0{,}970\ 1$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}970\ 1 = 14°2'10''$

---

b, $2x = 5 + 4y \longrightarrow 2x - 4y - 5 = 0$

$\overrightarrow{n_g} = (2; -4) \longrightarrow \overrightarrow{s_g} = (4; 2) \sim (2; 1)$; $k_h = -\frac{5}{3} \longrightarrow \overrightarrow{s_h} = (3; -5)$

$\cos\varphi = \frac{|2.3+1.(-5)|}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{3^2+(-5)^2}} = \frac{|6-5|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{9+25}} = \frac{|1|}{\sqrt{5}.\sqrt{34}} = \frac{1}{\sqrt{170}} = 0{,}076\ 7$

$\varphi = \cos^{-1} 0{,}076\ 7 = 85°36'5''$