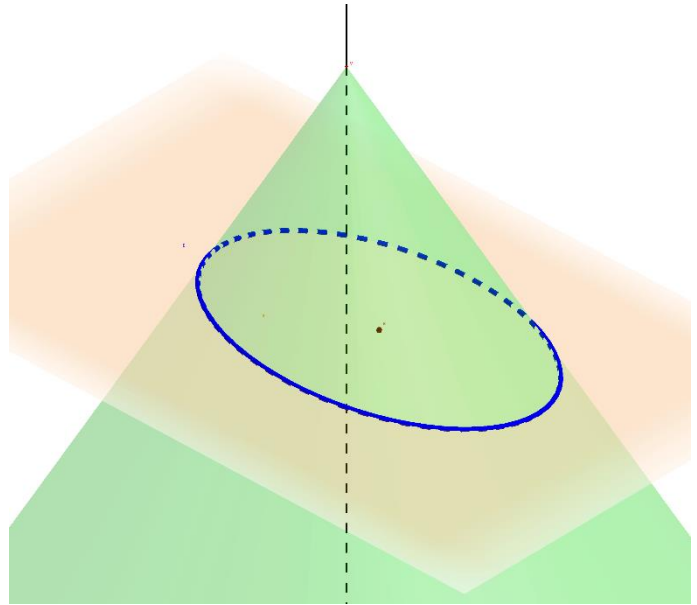
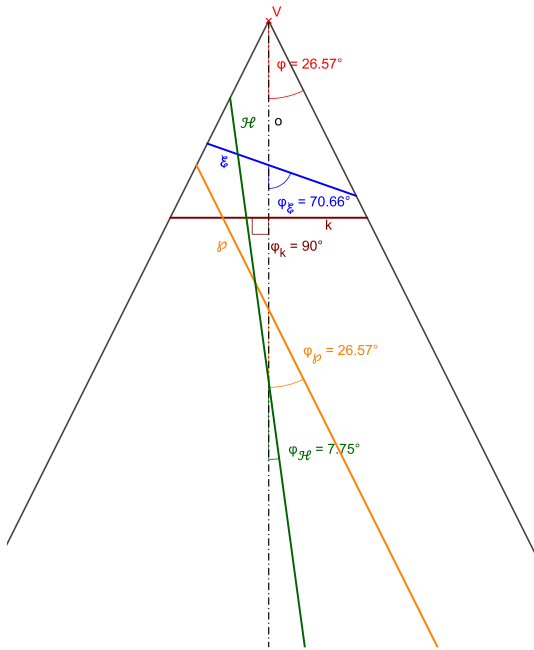


# Elipsa

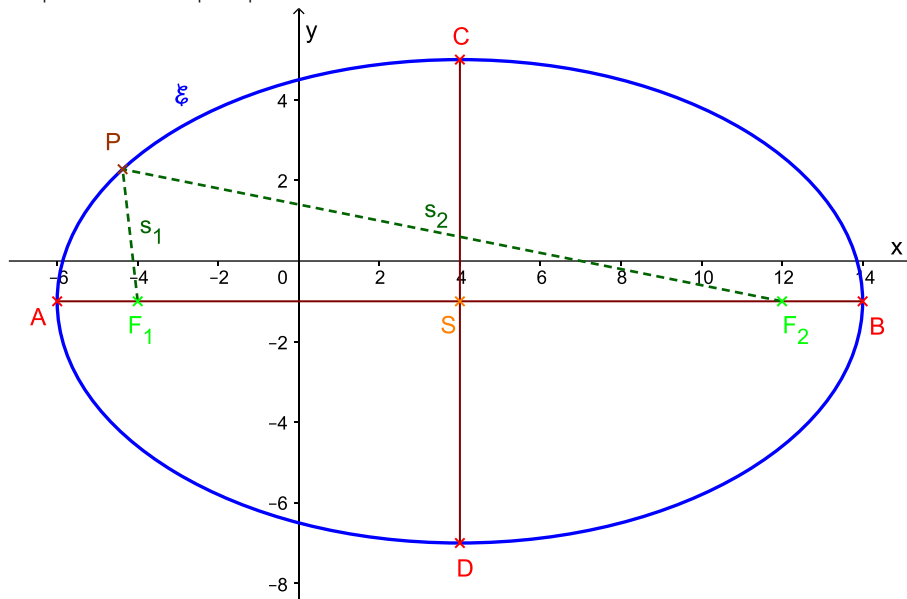
**analytická geometria:** kvadratický útvar, krivka druhého stupňa

**euklidovská geometria:** kužeľosečka (prienik kužeľovej plochy s rovinou) – rovina nie je rovnobežná ani jednou stranou kužeľa a nie je kolmá na os



**D. Elipsa** je množina bodov v rovine, ktorých súčet vzdialeností od dvoch vopred daných bodov je konštantný. Tie dané body sú **ohniská** a konštantný súčet je **dĺžka hlavnej osi**.

$$|F_1P| + |F_2P| = s_1 + s_2 = |AB| = 2a$$



S – stred  $\mathcal{E}$

A, B – hlavné vrcholy  $\mathcal{E}$ :  $A, B \in \mathcal{E}$

C, D – vedľajšie vrcholy  $\mathcal{E}$ :  $C, D \in \mathcal{E}$

$F_1, F_2$  – ohniská  $\mathcal{E}$

AB – hlavná os  $\mathcal{E}$

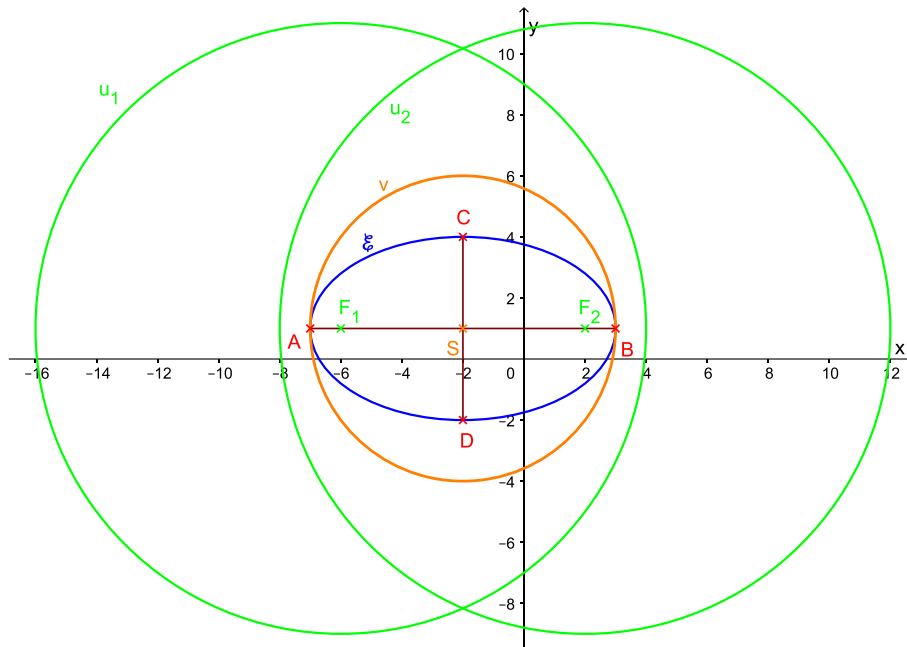
$|AB| = 2a$  – dĺžka hlavnej osi ( $a$  – dĺžka hlavnej polosi)

CD – vedľajšia os  $\mathcal{E}$

$|CD| = 2b$  – dĺžka vedľajšej osi ( $b$  – dĺžka vedľajšej polosi)

$|F_1S| = |SF_2| = e$  – lineárna excentricita (ohnisková vzdialenosť, výstrednosť)

$s_1; s_2$  – sprievodiče bodu P



$v$  – vrcholová kružnica:  $v(S, r = a)$   
 $u$  – určujúca kružnica:  $u_1(F_1, r = 2a)$ ;  $u_2(F_2, r = 2a)$

V.  $e^2 = a^2 - b^2$

$\mathcal{E}$ :  $S(u; v)$ ;  $a; b$  – stredová rovnica elipsy:

$\mathcal{E}$ :  $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$  AB  $\parallel x$  (ležatá  $\mathcal{E}$ )

$\mathcal{E}$ :  $\frac{(y-v)^2}{a^2} + \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$  AB  $\parallel y$  (stojatá  $\mathcal{E}$ )

odstránime zátvorky, prenesieme všetko na jednu stranu, usporiadame  $\rightarrow$  všeobecná rovnica elipsy:

$\mathcal{E}$ :  $A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x + D \cdot y + E = 0$   $A; B; C; D; E \in \mathbb{R}$

podmienka:  $A \cdot B > 0$  (A a B majú rovnaké znamienka)  $\wedge A \neq B$  (ale rôzne čísla)  $\wedge BC^2 + AD^2 - 4ABE > 0$

parametrická rovnica elipsy:

$\mathcal{E}$ :  $x = a \cdot \cos \varphi$ ;  $y = b \cdot \sin \varphi$   $\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$

súradnice bodov:

AB  $\parallel x$ :

$A(u - a; v)$	$C(u; v + b)$	$F_1(u - e; v)$
$B(u + a; v)$	$D(u; v - b)$	$F_2(u + e; v)$

AB  $\parallel y$ :

$A(u; v - a)$	$C(u - b; v)$	$F_1(u; v - e)$
$B(u; v + a)$	$D(u + b; v)$	$F_2(u; v + e)$

príklad:

Napište všeobecnú rovnicu elipsy, ak poznáte:  $a = 12, b = 9, S(-3; 2), AB \parallel x$

dosadíme do stredovej rovnice údaje

$\mathcal{E}$ :  $\frac{(x-(-3))^2}{12^2} + \frac{(y-2)^2}{9^2} = 1$

umocníme zátvorky

$\frac{x^2+6x+9}{144} + \frac{y^2-4y+4}{81} = 1$  /·1 296

odstránime zlomky

$9(x^2 + 6x + 9) + 16(y^2 - 4y + 4) = 1$  296

odstránime zátvorky

$9x^2 + 54x + 81 + 16y^2 - 64y + 64 = 1$  296 /-1 296

anulujeme rovnicu a preusporiadame

$\mathcal{E}$ :  $9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y - 1151 = 0$

Napíšte všeobecnú rovnicu elipsy, ak poznáte:  $a = 15$ ,  $e = 9$ ,  $S(4; -5)$ ,  $AB \parallel y$

najprv vypočítame vedľajšiu polos

$$e^2 = a^2 - b^2 \rightarrow b = \sqrt{a^2 - e^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x-4)^2}{15^2} + \frac{(y-(-5))^2}{12^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{225} + \frac{y^2 + 10y + 25}{144} = 1 \quad / \cdot 3 \ 600$$

$$16(x^2 - 8x + 16) + 25(y^2 + 10y + 25) = 3 \ 600$$

$$16x^2 - 128x + 256 + 25y^2 + 250y + 625 = 3 \ 600 \quad / - 3 \ 600$$

$$\mathcal{E}: 16x^2 + 25y^2 - 128x + 250y - 2 \ 719 = 0$$

Zistite súradnice stredu  $S$ ; vrcholov  $A, B, C, D$  a ohnisk  $F_1, F_2$  elipsy, veľkosť polosí  $a, b$  a lineárnu excentricitu  $e$  elipsy:  $\mathcal{E}: 169x^2 + 25y^2 + 376x + 150y - 3 \ 324 = 0$

$$169x^2 + 25y^2 + 376x + 150y - 3 \ 324 = 0$$

preusporiadame

$$169x^2 + 376x + 25y^2 + 150y = 3 \ 324$$

vymieme vo dvojiciach koeficienty (a iba koeficienty) kvadratických členov

$$169(x^2 + 4x) + 25(y^2 + 6y) = 3 \ 324$$

doplníme na úplný štvorec (na druhú mocninu dvojčlena)

$$169(x^2 + 4x + 2^2) + 25(y^2 + 6y + 3^2) = 3 \ 324 + 169 \cdot 2^2 + 25 \cdot 3^2$$

$$169(x + 2)^2 + 25(y + 3)^2 = 3 \ 324 + 676 + 225$$

vydelíme rovnicu s číslom z pravej strany – aby tam ostalo číslo 1

$$169(x + 2)^2 + 25(y + 3)^2 = 4 \ 225 \quad / : 4 \ 225$$

$$\frac{169(x+2)^2}{4 \ 225} + \frac{25(y+3)^2}{4 \ 225} = 1$$

odstránime z čitateľov čísla

$$\mathcal{E}: \frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{169} = 1$$

$$S(-2; -3)$$

$$169 > 25 \Rightarrow$$

$$a = 13$$

$$b = 5$$

$$e = \sqrt{169 - 25} = 12$$

v menovateli zlomku s  $y$ -om je väčšia hodnota ( $a$ )  $\Rightarrow AB \parallel y$

$$A(-2; -3 - 13) = (-2; -16)$$

$$C(-2 - 5; -3) = (-7; -3)$$

$$F_1(-2; -3 - 12) = (-2; -15)$$

$$B(-2; -3 + 13) = (-2; 10)$$

$$D(-2 + 5; -3) = (3; -3)$$

$$F_2(-2; -3 + 12) = (-2; 9)$$

Zistite súradnice stredu  $S$ ; vrcholov  $A, B, C, D$  a ohnisk  $F_1, F_2$  elipsy, veľkosť polosí  $a, b$  a lineárnu excentricitu  $e$  elipsy:  $\mathcal{E}: 5x^2 + 8y^2 + 18x - 10y - 30 = 0$

$$5x^2 + 8y^2 + 18x - 10y - 30 = 0$$

$$5x^2 + 18x + 8y^2 - 10y = 30$$

$$5\left(x^2 + \frac{18}{5}x\right) + 8\left(y^2 - \frac{10}{8}y\right) = 30$$

$$5\left(x^2 + \frac{18}{5}x + \left(\frac{9}{5}\right)^2\right) + 8\left(y^2 - \frac{5}{4}y + \left(\frac{5}{8}\right)^2\right) = 30 + 5 \cdot \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 8 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2$$

$$5\left(x + \frac{9}{5}\right)^2 + 8\left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = 30 + \frac{81}{5} + \frac{25}{8}$$

$$5\left(x + \frac{9}{5}\right)^2 + 8\left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \frac{1 \ 973}{40} \quad / : \frac{1 \ 973}{40}$$

$$\frac{5\left(x + \frac{9}{5}\right)^2}{\frac{1 \ 973}{40}} + \frac{8\left(y - \frac{5}{8}\right)^2}{\frac{1 \ 973}{40}} = 1$$

$$\frac{\left(x + \frac{9}{5}\right)^2}{\frac{1 \ 973}{40 \cdot 5}} + \frac{\left(y - \frac{5}{8}\right)^2}{\frac{1 \ 973}{40 \cdot 8}} = 1$$

$$\mathcal{E}: \frac{\left(x + \frac{9}{5}\right)^2}{\frac{1 \ 973}{200}} + \frac{\left(y - \frac{5}{8}\right)^2}{\frac{1 \ 973}{320}} = 1$$

$$S\left(-\frac{9}{5}; \frac{5}{8}\right)$$

$$\frac{1973}{200} > \frac{1973}{320} \Rightarrow$$

$$a = \sqrt{\frac{1973}{200}} = 3,1409$$

$$b = \sqrt{\frac{1973}{320}} = 2,4831$$

$$e = \sqrt{\frac{1973}{200} - \frac{1973}{320}} = \sqrt{\frac{5919}{1600}} = 1,9234$$

v menovateli zlomku s x-om je väčšia hodnota (a)  $\Rightarrow AB \parallel x$

$$A\left(-\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{1973}{200}}; \frac{5}{8}\right) =$$
$$= (-4,941; 0,625)$$

$$C\left(-\frac{9}{5}; \frac{5}{8} + \sqrt{\frac{1973}{320}}\right) =$$
$$= (-1,8; 3,108)$$

$$F_1\left(-\frac{9}{5} - \sqrt{\frac{5919}{1600}}; \frac{5}{8}\right) =$$
$$= (-3,723; 0,625)$$

$$B\left(-\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{1973}{200}}; \frac{5}{8}\right) =$$
$$= (1,341; 0,625)$$

$$D\left(-\frac{9}{5}; \frac{5}{8} - \sqrt{\frac{1973}{320}}\right) =$$
$$= (-1,8; -1,858)$$

$$F_2\left(-\frac{9}{5} + \sqrt{\frac{5919}{1600}}; \frac{5}{8}\right) =$$
$$= (0,123; 0,625)$$