

Két vektor hajlásszöge (Odchýlka dvoch vektorov)

Két vektor hajlásszöge egy konvex szög a $\varphi \in \langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ intervallumból. A legkisebb szög nulla fokos – az az eset, amikor a két vektor azonos irányú. A legnagyobb pedig 180 fokos – amikor a vektorok ellentett irányúak. Vagyis a szög nem 90° -nál ér véget, mint az egyenesek esetében.

Ha a vektorok skaláris szorzatának definíciójánál kapott összefüggést átrendezzük (a vektorok nagyságának szorzata megszorozva az általuk bezárt szög koszinuszával), és kifejezzük a szöget (tulajdonképpen a szög koszinuszát), egy olyan összefüggést kapunk, amivel könnyedén kiszámolhatjuk a hajlásszöget.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad /: (|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)$$

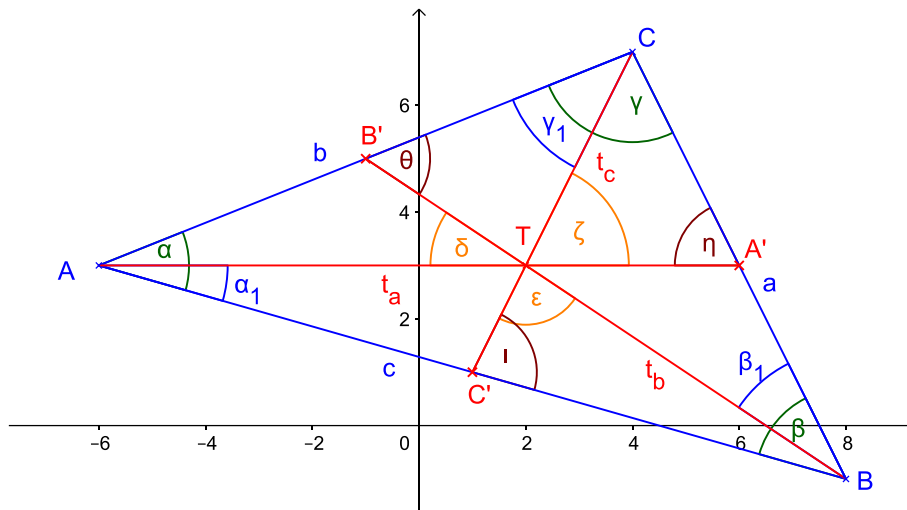
$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \cos \varphi$$

T. Ha adott két vektor $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$, akkor hajlásszögük:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

példa:

Adott egy ABC háromszög csúcsaival: A(-6; 3), B(8; -1), C(4; 7). Számítsuk ki belső szögeit (α, β, γ), súlyvonalai hajlásszögét ($\delta, \varepsilon, \zeta$), a súlyvonalak és az oldalak által bezárt szöget ($\eta, \theta, \iota; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$).



$$\alpha = b, c \text{ \textless \textless } = \overline{AB}, \overline{AC} \text{ \textless \textless}$$

$$\overline{AB} = B - A = (14; -4) \sim (7; -2)$$

$$\overline{AC} = C - A = (10; 4) \sim (5; 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{7 \cdot 5 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{7^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{35 - 4}{\sqrt{49 + 4} \cdot \sqrt{25 + 4}} = \frac{31}{\sqrt{53} \cdot 29} = 0,7907$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,7907$$

$$\alpha = 37^\circ 44' 48''$$

$$\beta = a, c \text{ \textless \textless } = \overline{BC}, \overline{BA} \text{ \textless \textless}$$

$$\overline{BC} = C - B = (-4; 8) \sim (-1; 2)$$

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = (-7; 2)$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BA}|} = \frac{-1 \cdot (-7) + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + 2^2}} = \frac{7 + 4}{\sqrt{1 + 4} \cdot \sqrt{49 + 4}} = \frac{11}{\sqrt{5} \cdot 53} = 0,6757$$

$$\beta = \cos^{-1} 0,6757$$

$$\beta = 47^\circ 29' 22''$$

$$\gamma = a, b \text{ \textless \textless } = \overline{CA}, \overline{CB} \text{ \textless \textless}$$

$$\overline{CA} = -\overline{AC} = (-5; -2)$$

$$\overline{CB} = -\overline{BC} = (1; -2)$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \frac{-5 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{-5 + 4}{\sqrt{25 + 4} \cdot \sqrt{1 + 4}} = \frac{-1}{\sqrt{29} \cdot 5} = -0,0830$$

$$\gamma = \cos^{-1} (-0,0830)$$

$$\gamma = 94^\circ 45' 49''$$

$$\delta = t_a, t_b \text{ \textless \textless } = \overline{AA'}, \overline{BB'} \text{ \textless \textless}$$

$$A' = \frac{B+C}{2} = (6; 3)$$

$$B' = \frac{A+C}{2} = (-1; 5)$$

$$\overrightarrow{AA'} = A' - A = (12; 0) \sim (1; 0)$$

$$\overrightarrow{BB'} = B' - B = (-9; 6) \sim (-3; 2)$$

$$\cos \delta = \frac{\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BB'}}{|\overrightarrow{AA'}| \cdot |\overrightarrow{BB'}|} = \frac{1 \cdot (-3) + 0 \cdot 2}{\sqrt{1^2+0^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+2^2}} = \frac{-3+0}{\sqrt{1+0} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{-3}{\sqrt{13}} = -0,8321$$

$$\delta' = \cos^{-1}(-0,8321) = 146^\circ 18' 36'' \Rightarrow \delta = 180^\circ - \delta'$$

$$\delta = 33^\circ 41' 24''$$

$$\varepsilon = t_b, t_c \sphericalangle = \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'} \sphericalangle$$

$$C' = \frac{A+B}{2} = (1; 1)$$

$$\overrightarrow{BB'} = (-3; 2)$$

$$\overrightarrow{CC'} = C' - C = (-3; -6) \sim (-1; -2)$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{CC'}}{|\overrightarrow{BB'}| \cdot |\overrightarrow{CC'}|} = \frac{-3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{(-3)^2+2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{3-4}{\sqrt{9+4} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{-1}{\sqrt{13} \cdot 5} = -0,1240$$

$$\varepsilon' = \cos^{-1}(-0,1240) = 97^\circ 7' 30'' \Rightarrow \varepsilon = 180^\circ - \varepsilon'$$

$$\varepsilon = 82^\circ 52' 30''$$

$$\zeta = t_c, t_a \sphericalangle = \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{AA'} \sphericalangle$$

$$\overrightarrow{CC'} = (-1; -2)$$

$$\overrightarrow{AA'} = (1; 0)$$

$$\cos \zeta = \frac{\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{AA'}}{|\overrightarrow{CC'}| \cdot |\overrightarrow{AA'}|} = \frac{-1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2}} = \frac{-1+0}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot 1} = -0,4472$$

$$\zeta' = \cos^{-1}(-0,4472) = 116^\circ 33' 54'' \Rightarrow \zeta = 180^\circ - \zeta'$$

$$\zeta = 63^\circ 26' 6''$$

$$\eta = a, t_a \sphericalangle = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A'A} \sphericalangle$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1; 2)$$

$$\overrightarrow{A'A} = -\overrightarrow{AA'} = (-1; 0)$$

$$\cos \eta = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'A}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{A'A}|} = \frac{-1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2+2^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+0^2}} = \frac{1+0}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 1} = 0,4472$$

$$\eta = \cos^{-1} 0,4472$$

$$\eta = 63^\circ 26' 6''$$

$$\theta = b, t_b \sphericalangle = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{B'B} \sphericalangle$$

$$\overrightarrow{AC} = (5; 2)$$

$$\overrightarrow{B'B} = -\overrightarrow{BB'} = (3; -2)$$

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'B}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{B'B}|} = \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot (-2)}{\sqrt{5^2+2^2} \cdot \sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{15-4}{\sqrt{25+4} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{11}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{13}} = 0,5665$$

$$\theta = \cos^{-1} 0,5665$$

$$\theta = 55^\circ 29' 29''$$

$$\iota = c, t_c \sphericalangle = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{C'C} \sphericalangle$$

$$\overrightarrow{AB} = (7; -2)$$

$$\overrightarrow{C'C} = -\overrightarrow{CC'} = (1; 2)$$

$$\cos \iota = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'C}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{C'C}|} = \frac{7 \cdot 1 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{7^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{1^2+2^2}} = \frac{7-4}{\sqrt{49+4} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{53} \cdot 5} = 0,1843$$

$$\iota = \cos^{-1} 0,1843$$

$$\iota = 79^\circ 22' 49''$$

$$\alpha_1 = c, t_a \sphericalangle = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'} \sphericalangle$$

$$\overrightarrow{AB} = (7; -2)$$

$$\overrightarrow{AA'} = (1; 0)$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AA'}|} = \frac{7 \cdot 1 + (-2) \cdot 0}{\sqrt{7^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{1^2+0^2}} = \frac{7+0}{\sqrt{49+4} \cdot \sqrt{1+0}} = \frac{7}{\sqrt{53} \cdot 1} = 0,9615$$

$$\alpha_1 = \cos^{-1} 0,9615$$

$$\alpha_1 = 15^\circ 56' 43''$$

$$\beta_1 = a, t_b \sphericalangle = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'} \sphericalangle$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1; 2)$$

$$\overrightarrow{BB'} = (-3; 2)$$

$$\cos \beta_1 = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BB'}}{|\overline{BC}| \cdot |\overline{BB'}|} = \frac{-1 \cdot (-3) + 2 \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 2^2}} = \frac{3+4}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+4}} = \frac{7}{\sqrt{5 \cdot 13}} = 0,8682$$

$$\beta_1 = \cos^{-1} 0,8682$$

$$\beta_1 = 29^\circ 44' 42''$$

$$\gamma_1 = b, t_c \text{ } \sphericalangle = \overline{CA}, \overline{CC'}$$

$$\overline{CA} = (-5; -2)$$

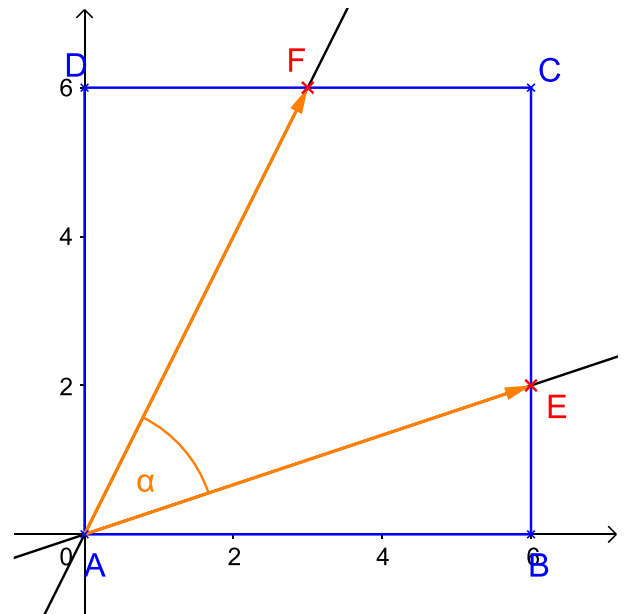
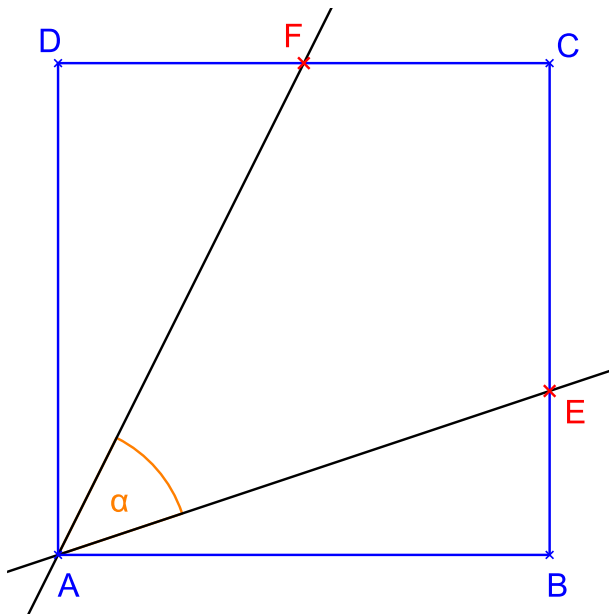
$$\overline{CC'} = (-1; -2)$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CC'}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CC'}|} = \frac{-5 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{5+4}{\sqrt{25+4} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{9}{\sqrt{29 \cdot 5}} = 0,7474$$

$$\gamma_1 = \cos^{-1} 0,7474$$

$$\gamma_1 = 41^\circ 38' 1''$$

Az ABCD négyzet A csúcsából indul ki két egyenes, melyek áthaladnak az E illetve az F ponton. Az E pont a BC oldal harmadában a B csúcshoz közelebb fekszik. Az F pont pedig a CD oldal felezőpontja. Mekkora szöget zár be a két egyenes?



elhelyezük négyzetünket a koordinátarendszerbe – mivel az egyik pont felezi, a másik pont harmadolja az oldalt, az oldalat 6 egységnek választjuk $\Rightarrow E = (6; 2), F = (3; 6)$

$$\overline{AE} = E - A = (6; 2) \sim (3; 1)$$

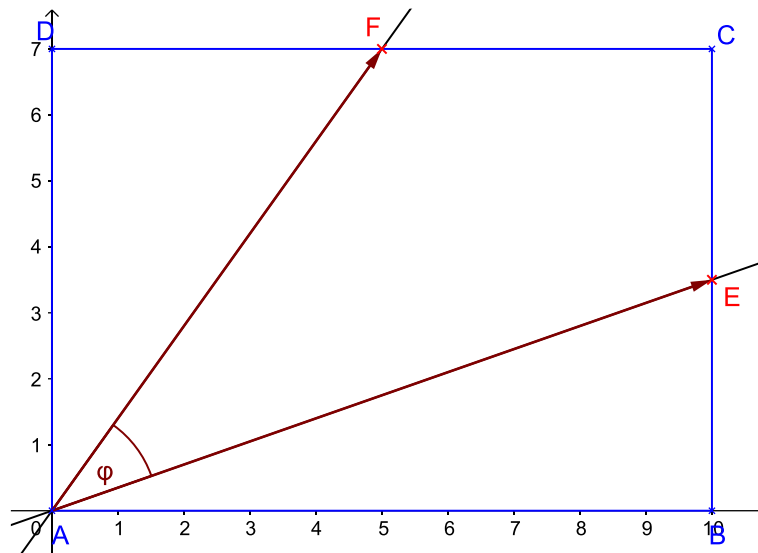
$$\overline{AF} = F - A = (3; 6) \sim (1; 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{AF}}{|\overline{AE}| \cdot |\overline{AF}|} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3+2}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{10 \cdot 5}} = 0,7071$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,7071$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Egy 10×7 méretű téglalap egyik csúcsából két egyenest húzunk, melyek felezik a szemközi oldalakat. Mekkora szöget zár be a két egyenes?



$$\overrightarrow{AE} = E - A = (10; 3,5)$$

$$\overrightarrow{AF} = F - A = (5; 7)$$

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{AF}|} = \frac{10 \cdot 5 + 3,5 \cdot 7}{\sqrt{10^2 + 3,5^2} \cdot \sqrt{5^2 + 7^2}} = \frac{50 + 24,5}{\sqrt{100 + 12,25} \cdot \sqrt{25 + 49}} = \frac{74,5}{\sqrt{112,25} \cdot 7,4} = 0,8174$$

$$\varphi = \cos^{-1} 0,8175$$

$$\varphi = 35^{\circ}10'20''$$