

Mocniny s racionálnym mocniteľom

$$a^q = b$$

$$a \in \mathbb{R} \wedge q \in \mathbb{Q}$$

$$q = \frac{r}{s}$$

$$r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; s \in \mathbb{N}$$

a na q -tú (q -tá mocnina čísla a)

a

základ mocniny (mocnenec)

q

mocniteľ (exponent)

b

hodnota mocniny

a^q

mocnina

D.

$$a^{\frac{r}{s}} := \sqrt[s]{a^r}$$

Každú mocninu s racionálnym mocniteľom môžeme previesť na odmocninu, kde odmocniteľ bude menovateľ racionálneho mocniteľa a čitateľ ostáva mocniteľom pôvodného základu v základe odmocniny.

$$x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}; x^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{x^3}; x^{\frac{6}{13}} = \sqrt[13]{x^6}$$

Ak racionálny mocniteľ je záporný, potom mocninu podľa definície záporných mocniteľov prepíšeme na prevrátenú hodnotu mocniny už s kladným racionálnym mocniteľom.

$$x^{-\frac{7}{11}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{11}}} = \frac{1}{\sqrt[11]{x^7}}$$

Každú odmocninu môžeme previesť na mocninu s racionálnym mocniteľom, kde čitateľ racionálneho mocniteľa bude mocniteľ pôvodného základu z odmocniny a menovateľ bude odmocniteľ.

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}; \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}; \sqrt[8]{x^{19}} = x^{\frac{19}{8}}$$

P. Preto príklady obsahujúce odmocniny, mocniny s racionálnym mocniteľom alebo aj-aj, môžeme riešiť aj v tvare odmocnín, aj v tvare mocnín. Obidva spôsoby majú svoje výhody a nevýhody.

- Vety o mocninách ste sa učili už aj na ZŠ (je to vlastne opakovanie – a pri racionálnych mocniteľoch vlastne tretíkrát ich stretnete), takže mali by ste ich ovládať lepšie ako odmocniny. $\leftrightarrow$ V tvare mocnín zase musíte perfektne ovládať počítanie so zlomkami (racionálnymi číslami).

- Pri práci s odmocninami nemáte zlomky, iba celé odmocnitele. $\leftrightarrow$ Vety o odmocninách sú nové – prvýkrát ste ich stretli na SŠ.

To znamená, že ak zvlášť neurčíme pri takýchto typoch príkladov ktorým spôsobom máš riešiť, môžeš si vybrať sám.

Teoreticky mocniny s racionálnym mocniteľom sú definované pre všetky reálne čísla. Ale predsa sú také, ktoré neexistujú.

Predpokladajme, že mocniteľ je v základnom tvare zlomku (nedá sa zjednodušiť ďalej). Skúsme umocniť záporné číslo.

$$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^3} = \sqrt[5]{-8} \doteq -1,516$$

$$(-2)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(-2)^4} = \sqrt[5]{16} \doteq 1,741$$

$$(-2)^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{(-2)^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(-2)^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{-8}} = \frac{1}{-1,516} = -0,659$$

$$(-2)^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{(-2)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(-2)^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{16}} = \frac{1}{1,741} = 0,574$$

skúsme mocniteľ s párnym číslom v menovateli

$$(-2)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^5} = \sqrt[6]{-32} \notin \mathbb{R}$$

párnu odmocninu zo záporného čísla už v množine reálnych čísel nevypočítame

a ešte jeden príklad

$$0^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{0^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{0^5}} = \frac{1}{0} \rightarrow \text{nulou sa nedá deliť (ale už ani celočíselné záporné mocniny 0 neexistovali)}$$

Takže ak chceme upresniť pre ktoré čísla sa dá vypočítať racionálna mocnina, môžeme konštatovať, že:

- ak racionálny mocniteľ má v menovateli nepárne číslo ($s = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$), potom základom môže byť ľubovoľné číslo, pričom párnosť čitateľa neovplyvní vypočítateľnosť

ak je základ mocniny výraz, nebude žiadna podmienka

- ak menovateľ je párne číslo ($s = 2k$, kde $k \in \mathbb{Z}$), potom čitateľ musí byť nepárne číslo (lebo zlomok by nebol v základnom tvare), vtedy základ mocniny musí byť nezáporný (alebo pri zápornom mocniteli kladný)

ak je základ mocniny výraz, pribudne podmienka – základ ≥ 0 (pre záporný mociteľ > 0)

P. Ak chceme zjednodušiť prácu, zúžime množinu základu mocniny na nezáporné čísla: $a \in \mathbb{R}_0^+$, a ešte lepšie na kladné: $a \in \mathbb{R}^+$.

P. Vlastnosti a vety zdedia po mocninách s celočíselnými mociteľmi. Každá veta (a – e) sa používa a využíva z oboch strán.

P.

$$\neq 0^0$$

V.

$$\forall q \in \mathbb{Q}^+: 0^q = 0$$

$$\forall q: 1^q = 1$$

$$\forall a > 0: a^q > 0$$

V. $a, b \in \mathbb{R}_0^+ \wedge p, q \in \mathbb{Q}: p = \frac{r}{s}; q = \frac{t}{u}; r, t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; s, u \in \mathbb{N}$

a, **súčin mocnín so spoločným základom**

$$a^p \cdot a^q = a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{t}{u}} = a^{\frac{r}{s} + \frac{t}{u}} = a^{\frac{ru+ts}{su}} = a^{p+q}$$

$$x^{\frac{6}{5}} \cdot x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{6}{5} + \frac{2}{3}} = x^{\frac{6 \cdot 3 + 2 \cdot 5}{5 \cdot 3}} = x^{\frac{28}{15}}$$

$$y^{\frac{17}{12}} = y^{\frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4}} = y^{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = y^{\frac{5 \cdot 4 + (-1) \cdot 3}{3 \cdot 4}} = y^{\frac{5}{3} - \frac{1}{4}} = \dots$$

b, **podiel mocnín so spoločným**

$$\frac{a^p}{a^q} = \frac{a^{\frac{r}{s}}}{a^{\frac{t}{u}}} = a^{\frac{r}{s} - \frac{t}{u}} = a^{\frac{ru-ts}{su}} = a^{p-q} \quad a \neq 0$$

$$\frac{x^{\frac{8}{3}}}{x^{\frac{5}{6}}} = x^{\frac{8}{3} - \frac{5}{6}} = x^{\frac{8 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = x^{\frac{8 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{3 \cdot 2}} = x^{\frac{33}{6}} = x^{\frac{11}{2}}$$

$$y^{\frac{19}{21}} = y^{\frac{4 \cdot 7 - 3 \cdot 3}{3 \cdot 7}} = \frac{y^{\frac{4}{3}}}{y^{\frac{3}{7}}} = y^{\frac{18 \cdot 3 - 5 \cdot 7}{7 \cdot 3}} = \frac{y^{\frac{18}{5}}}{y^{\frac{5}{3}}} = \dots$$

c, **mocnina súčinu**

$$(a \cdot b)^p = (a \cdot b)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{r}{s}} \cdot b^{\frac{r}{s}} = a^p \cdot b^p$$

$$(x \cdot y)^{-\frac{2}{9}} = x^{-\frac{2}{9}} \cdot y^{-\frac{2}{9}}$$

$$x^{\frac{4}{7}} \cdot y^{\frac{4}{7}} = (x \cdot y)^{\frac{4}{7}}$$

d, **mocnina podielu**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{r}{s}} = \frac{a^{\frac{r}{s}}}{b^{\frac{r}{s}}} = \frac{a^p}{b^p} \quad b \neq 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{10}{13}} = \frac{x^{\frac{10}{13}}}{y^{\frac{10}{13}}}$$

$$\frac{x^{\frac{2}{5}}}{y^{-\frac{2}{5}}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

e, **mocnina mocniny**

$$(a^p)^q = \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{t}{u}} = a^{\frac{r}{s} \cdot \frac{t}{u}} = a^{\frac{rt}{su}} = a^{p \cdot q}$$

$$\left(x^{\frac{4}{5}}\right)^{-\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)} = x^{-\frac{6}{5}}$$

$$y^{\frac{8}{15}} = y^{-\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)} = \left(y^{-\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

Vypočítajte:

$$a, 81^{-\frac{3}{4}}$$

$$b, 256^{\frac{5}{8}}$$

$$C, \overset{1}{\underset{\cdot}{X^3}}, \overset{1}{\underset{\cdot}{X^4}}, \overset{1}{\underset{\cdot}{X^6}}$$

$$d, \left(x^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}} : x^{\frac{5}{4}}$$

$$e, \frac{12^{\frac{2}{3}} \cdot 81^{-\frac{4}{3}}}{\left(15^{\frac{3}{4}} \cdot 20^{-\frac{3}{8}}\right)^2} : \frac{\sqrt[4]{\sqrt[4]{8}}}{\sqrt[4]{4^3 \sqrt[3]{16}}}$$

$$81^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{81^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81^3}} = \frac{1}{(\sqrt[4]{81})^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \doteq 0,037$$

$$256^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{256^5} = \sqrt[8]{(2^8)^5} = \sqrt[8]{2^{40}} = \sqrt[4]{2^5} = 2^5 = 32$$

$$X^{\frac{1}{3}} \cdot X^{\frac{1}{4}} \cdot X^{\frac{1}{6}} = X^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = X^{\frac{1.4 + 1.3 + 1.2}{12}} = X^{\frac{9}{12}} = X^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{X^3}$$

$$\left(X^{-\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}} : X^{\frac{5}{4}} = X^{-\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} : X^{\frac{5}{4}} = X^{\frac{2}{5}} : X^{\frac{5}{4}} = X^{\frac{2 \cdot 4 - 5 \cdot 5}{20}} = X^{-\frac{17}{20}} = \frac{1}{20^{\frac{17}{20}}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{12^{\frac{2}{3}} \cdot 81^{-\frac{4}{3}}}{\left(15^{\frac{3}{4}} \cdot 20^{-\frac{3}{8}}\right)^2} : \frac{\sqrt[4]{4\sqrt{8}}}{\sqrt[4]{4^3\sqrt{16}}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{\frac{2}{3}} \cdot (3^4)^{-\frac{4}{3}}}{\left((3 \cdot 5)^{\frac{3}{4}} \cdot (2^2 \cdot 5)^{-\frac{3}{8}}\right)^2} : \frac{\left((2^3)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2^2 \cdot (2^4)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{2^{2 \cdot \frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)}{3^{4 \cdot 2} \cdot 5^{4 \cdot 2} \cdot 2^{2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)} \cdot 5^{-\frac{3}{8} \cdot 2}} : \frac{2^{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2}}{2^{2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2} \cdot 2^{4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}} = \\ & = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{16}{3}}}{32^{\frac{3}{2}} \cdot 52^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} \cdot 5^{-\frac{3}{4}}} : \frac{2^{\frac{3}{2}}}{22^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-\frac{16}{3}}}{32 \cdot 52 \cdot 2 \cdot 5^{-\frac{3}{4}}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}}{28} = 2^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{8}\right)} \cdot 3^{\frac{2}{3} + \left(-\frac{16}{3}\right) - \frac{3}{2} \cdot 5^0 - \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)} = \\ & = 2^{\frac{4 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 - (-12 + 3)}{24}} \cdot 3^{\frac{2 \cdot 8 - 16 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - (3 \cdot 3)}{6}} \cdot 5^{\frac{-3 \cdot 2 + 3}{4}} = 2^{\frac{79}{24}} \cdot 3^{-\frac{37}{6}} \cdot 5^{-\frac{3}{4}} = \frac{2^4 \sqrt[2]{2^{79}}}{\sqrt[6]{2^{37} \cdot 4 \sqrt[5]{3}}} \end{aligned}$$

Vypočítajte:

$$a, 1\,000^{-\frac{1}{3}}$$

$$b, 0,000 \ 1^{-\frac{3}{4}}$$

$c, 256^{0,75}$

Vypočítajte:

$$a, a^{\frac{5}{8}}, \sqrt[4]{a^2}$$

$$b, x^{\frac{1}{4}}, x^{\frac{1}{8}}, x^{\frac{1}{12}}$$

$$c, a^{-\frac{1}{2}}.a^{-\frac{1}{6}}.a^{-1}.a^{0,5}$$

$$d, \left(m^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$e, \sqrt[6]{a^8:a^{-4}}$$

$$f, \left(x^{\frac{6}{7}} \cdot x^{-\frac{2}{5}} \right)^{-\frac{4}{3}}$$

$$g, \left(a^{\frac{3}{4}}, a^{\frac{8}{6}}\right) : a^{\frac{11}{12}}$$

Vypočítajte:

$$a, 3^{\frac{3}{4}} \cdot \left[(9a^{-3}b^{-2})^{\frac{5}{3}} \right]^{-\frac{1}{3}} \cdot \left[(3ab)^{-\frac{4}{3}} \right]^{-\frac{4}{5}}$$

$$\text{b, } \frac{15^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{-\frac{1}{2}}}{\left(25^{\frac{1}{4}} \cdot 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \frac{\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3^4 \sqrt[4]{27}}}$$

Vypočítajte:

$$a, 5^{\frac{3}{4}} \left[(25a^{-2}b^{-2})^{\frac{5}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[(5ab)^{-\frac{5}{3}} \right]^{-\frac{4}{5}}$$

$$\text{b, } \left[a^{-\frac{3}{2}} b (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} (a^{-1})^{-\frac{2}{3}} \right]^3$$