

Függvények – a konstans függvény (Funkcie – konštantná funkcia)

$$X, Y \subseteq \mathbb{R}$$

rendezett számpár (usporiadaná dvojica čísel) – két szám adott sorrendben (függ a sorrendtől)

jelölés: $[x; y]$ vagy $(x; y)$

$$[x; y] = [y; x] \Leftrightarrow x = y$$

halmazok Descartes-szorzata (karteziánsky/kartézsky súčin množín) – a két halmaz elemeiből képezett összes rendezett pár halmaza, ahol a rendezett párokban az első helyre az első, a második helyre pedig a második halmazból kerülnek

$$X \times Y := \{[x; y] \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

$$\text{ha } |X| = n \text{ és } |Y| = m \Rightarrow |X \times Y| = n \cdot m$$

pl. $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}; Y = \{10; 20; 30; 40\}$

$$X \times Y = \{[1; 10]; [1; 20]; [1; 30]; [1; 40]; \\ [2; 10]; [2; 20]; [2; 30]; [2; 40]; \\ [3; 10]; [3; 20]; [3; 30]; [3; 40]; \\ [4; 10]; [4; 20]; [4; 30]; [4; 40]; \\ [5; 10]; [5; 20]; [5; 30]; [5; 40]\}$$

D. A függvény (funkcia) két számhalmaz Descartes-szorzatának olyan részhalmaza, melyben a rendezett számpárok első helyén nem ismétlődik egyetlen szám sem.

$$f \subset X \times Y$$

$$f := \{[x; y] \mid x \in X \wedge y \in Y; \forall [x_1; y_1]; [x_2; y_2] \in f \wedge x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2\}$$

D. (rövid verzió) Minden x -hez csak egy y tartozik $\rightarrow$ vagyis egyértelmű.

jelölés:

$$f: y = \text{előírás}$$

$$f(x) = \text{előírás}$$

$$f: x \mapsto \text{előírás}$$

pl. $f = \{[1; 30]; [2; 10]; [5; 20]\}$

$$g = \{[1; 20]; [2; 30]; [3; 40]; [4; 10]; [5; 40]\}$$

$$h = \{[1; 40]; [3; 20]; [4; 30]; [5; 10]\}$$

ellenpélda: $i = \{[1; 10]; [2; 20]; [3; 20]; [4; 20]; [4; 40]; [5; 30]\}$

a függvény értelmezési tartománya (definičný obor funkcie) (D_f vagy $D(f)$) – azon x -értékek halmaza (a független változók halmaza), melyek a függvényhez tartozó rendezett számpárok első helyein szerepelnek

$$D_f \subseteq X$$

$$D_f := \{x \mid \exists y: [x; y] \in f\}$$

pl. $D_f = \{1; 2; 5\}$, $D_g = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, $D_h = \{1; 3; 4; 5\}$

a függvény értékkészlete (obor funkčných hodnôt) (H_f/R_f vagy $H(f)$) – azon y -értékek halmaza (függvényértékek, függő változók halmaza), melyek a függvényhez tartozó rendezett számpárok második helyein szerepelnek

$$H_f \subseteq Y$$

$$H_f := \{y \mid \exists x: [x; y] \in f\}$$

pl. $H_f = \{10; 20; 30\}$, $H_g = \{10; 20; 30; 40\}$, $H_h = \{10; 20; 30; 40\}$

koordináta-rendszer (súradnicová sústava) – két egyenes + egységek a tengelyeken

x tengely: abszcissza

y tengely: ordináta

ortogonális rendszer: derékszögű

klinogonális rendszer: ferdeszögű

normált rendszer: azonos léptékű (egységű)

denormált rendszer: különböző léptékű

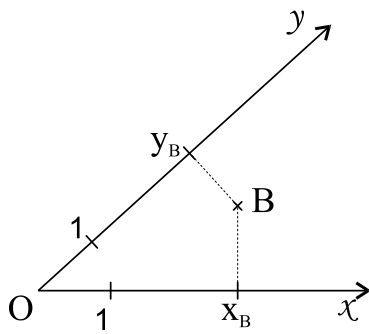
ortonormált (Descartes-féle) rendszer: derékszögű + azonos léptékű

M. ferdeszögű koordináta-rendszer (kosouhlá/šikmá sústava): a tengelyek nem merőlegesek

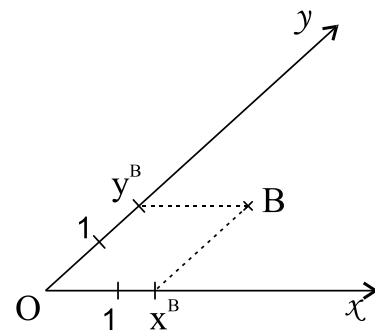
kovariáns és kontravariáns koordináták

kovariáns koordináták: merőlegesen a tengelyekre – $B(x_B; y_B)$

kontravariáns koordináták: párhuzamosan a másik tengellyel – $B(x^B; y^B)$



kovariáns koordináták



kontravariáns koordináták

görbe vonalú koordináta-rendszer (krivočiara sústava): a tengelyek görbék

a függvény grafikonja (gráfja) (graf funkcie) – a függvényhez tartozó rendezett számpárok, mint koordináta-rendszerbeli pontok összessége

injektív (kölcsonösen egyértelmű) függvény (injektívna/prostá funkcia) – függvényhez tartozó rendezett számpárokból nem ismétlődnek a második helyen sem az elemek – más x -hez más y tartozik

$$f := \{ \forall [x_1; y_1]; [x_2; y_2] \in f \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \}$$

az f és a h függvények injektívek

szürjektív (ráképezés) függvény (surjektívna funkcia) – a második halmaz (Y) minden eleme szerepel legalább egyszer függvényértékként (hozzá van rendelve valamely x -hez)

$$H_f = Y$$

$$H_f = \{ y \mid \forall y \in Y \Rightarrow \exists x: [x; y] \in f \}$$

a g és a h függvények szürjektívek

bijektív (kölcsonösen egyértelmű ráképezés) függvény (bijektívna funkcia) – injektív és szürjektív is

a h függvény bijektív

monotonitás (monotónnosť) (**M.**) – monoton és szigorúan monoton

monoton növekvő függvény (rastúca funkcia) – az f függvény az I_1 intervallumon (intervallumban) monoton növekvő, ha ezen intervallumon nagyobb x értékhez nagyobb függvényérték tartozik

$$I_1 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I_1: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

monoton csökkenő függvény (klesajúca funkcia) – az f függvény az I_2 intervallumon monoton csökkenő, ha ezen intervallumon nagyobb x értékhez kisebb függvényérték tartozik

$$I_2 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_3, x_4 \in I_2: x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) > f(x_4)$$

nemcsökkenő függvény (neklesajúca funkcia) – $I_3 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_5, x_6 \in I_3: x_5 < x_6 \Rightarrow f(x_5) \leq f(x_6)$

nemnövekvő függvény (nerastúca funkcia) – $I_4 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_7, x_8 \in I_4: x_7 < x_8 \Rightarrow f(x_7) \geq f(x_8)$

zérushelyek (nulové/osové body) (**Z.H.**) – a függvény grafikonjának közös pontjai a tengelyekkel (ha léteznek)

az x tengely pontjainak y koordinátája 0: $X_1(x_1; 0)$

az y tengely pontjainak x koordinátája 0: $Y(0; y)$

M. Egy függvény grafikonjának végtelen sok közös pontja lehet az x tengellyel $\leftrightarrow$ de az y tengellyel legfeljebb egy lehet (különben megszűnne függvénynek lenni – a definícióval ellentmondana)

függvény párossága (párnosť funkcie) (**P.á.**) – a függvények többsége se nem páros, se nem páratlan

páros függvény (párna funkcia) – az f függvény páros, ha ellentett x értékekhez azonos függvényértékek tartoznak

$$\forall x \in D_f: f(x) = f(-x)$$

a páros függvény grafikonja tengelyesen szimmetrikus (tükrös) az y tengely szerint

páratlan függvény (nepárna funkcia) – az f függvény páratlan, ha ellentett x értékekhez ellentett függvényértékek tartoznak

$$\forall x \in D_f: f(x) = -f(-x)$$

a páratlan függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az origó szerint

a függvény szélsőértékei (extrémum funkció) (**Sz.É.**) – lokális (helyi) ↔ globális (abszolút)

lokális minimum (lokálne minimum) – az f függvénynek az x_1 pontban lokális minimuma van, ha az $(a_1; b_1)$ nyílt intervallum x_1 pontjában éri el a legkisebb függvényértéket

$$\exists (a_1; b_1) \subset D_f: x_1 \in (a_1; b_1) \wedge \forall x \in (a_1; b_1) \setminus \{x_1\} \Rightarrow f(x_1) < f(x)$$

lokális maximum (lokálne maximum) – az f függvénynek az x_2 pontban lokális maximuma van, ha az $(a_2; b_2)$ nyílt intervallum x_2 pontjában veszi fel a legnagyobb függvényértéket

$$\exists (a_2; b_2) \subset D_f: x_2 \in (a_2; b_2) \wedge \forall x \in (a_2; b_2) \setminus \{x_2\} \Rightarrow f(x) < f(x_2)$$

globális minimum (globálne minimum) – az f függvénynek az x_3 pontban globális minimuma van, ha az értelmezési tartomány x_3 pontjában veszi fel a legkisebb függvényértéket

$$x_3 \in D_f \wedge \forall x \in D_f \setminus \{x_3\} \Rightarrow f(x_3) < f(x)$$

globális maximum (globálne maximum) – az f függvénynek az x_4 pontban globális maximuma van, ha az értelmezési tartomány x_4 pontjában éri el a legnagyobb függvényértéket

$$x_4 \in D_f \wedge \forall x \in D_f \setminus \{x_4\} \Rightarrow f(x) < f(x_4)$$

a függvény periodikussága/periodicitása (periodicitás/periodicitás funkció) (**Pe.**) – az f függvény periodikus, ha létezik olyan pozitív p szám (periódus), hogy a függvény az x pontban ugyanazon függvényértéket vesz fel, mint p -vel odébb.

$$\exists p > 0: \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(x + p)$$

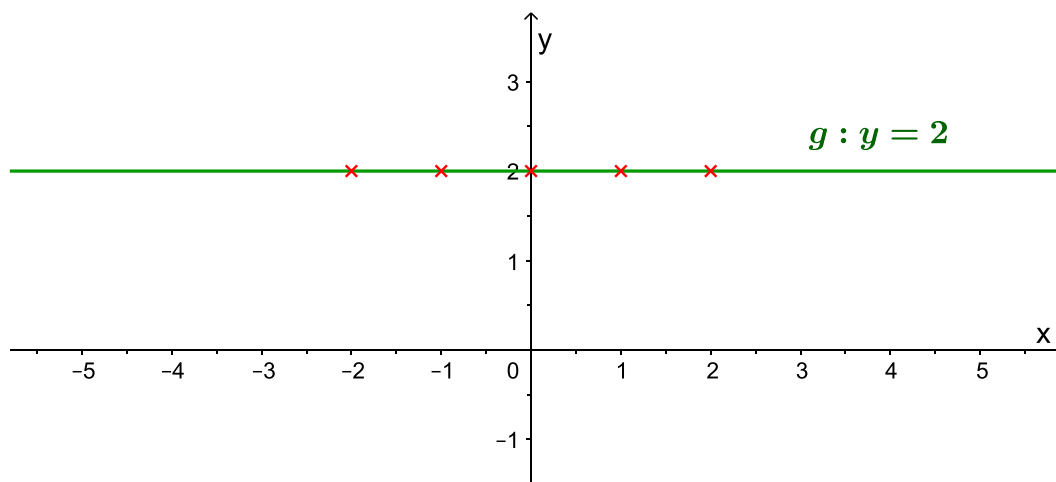
M. A periodicitás definíciójából következik, hogy a periódus egész-számszorosával odébb is ugyanazt a függvényértéket adja: $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = f(x + k \cdot p)$.

a konstans függvény (konstanta funkció) – az előírásában csak egy konstans (konstans tag [nulladfokú tag] – szám) szerepel

$$f: y = c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$pl.: g: y = 2$$

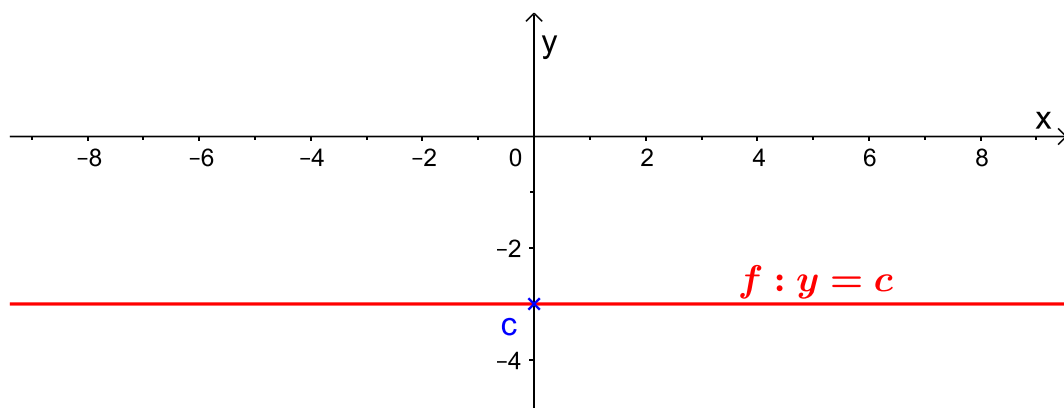
x	-2	-1	0	1	2
y	2	2	2	2	2



értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$

értékkészlet: $H_f = \{c\}$

grafikon: **G.** az x tengellyel párhuzamos egyenes



monotonitás: **M.** se nem növekvő, se nem csökkenő

zérushelyek – az x illetve az y tengellyel közös pontok (ha vannak):

$$\text{Z.H.} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}; \text{ ha } c = 0 \\ \nexists x; \text{ ha } c \neq 0 \end{cases}$$

$Y(0; c)$

szélsőértékek: **Sz.É.** nincs