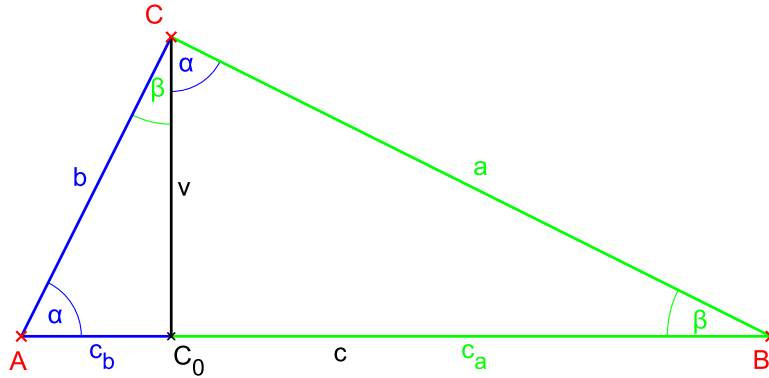


Eukleidész tételei és Pitagorasz tétele (Euklidove vety a veta Pytagorova)

Egy helyesen megjelölt derékszögű háromszögben, melynek csúcsai az abc három egymás után következő betűi, az utolsó betű (C) a derékszögnél található. A **befogók** (odvesny) [a; b] azon oldalak, melyek a derékszöget közre zárják – ezek a rövidebbek; míg az **átfogó** (prepona) [c] a két befogót köti össze, szemben a derékszöggel – hossza pedig a legnagyobb.

Az ABC háromszög magasságvonalának talppontja (C_0) az átfogót két szakaszra osztja: c_a és c_b részekre. Ezen szakaszok arról kapták nevüket, hogy ők a befogók merőleges vetületei az átfogón (vagyis az átfogó adott befogó melletti része).



a magasságvonal berajzolásával két újabb derékszögű háromszög keletkezett → ezekben az egyik hegyesszög közös az eredeti ABC háromszöggel, ezért a másik hegyesszögnek is egybevágónak kell lennie – csakis így egészítheti ki a belső szögek összegét 180° -ra

$$\angle BCC_0 \cong \angle BAC; \angle ACC_0 \cong \angle ABC$$

ebből következik, hogy mindhárom háromszögünk hasonló:

$$\triangle ABC \sim \triangle ACC_0 \sim \triangle CBC_0$$

a hasonlóság miatt írhatjuk a megfelelő oldalak arányainak egyenlőségét

mindig két háromszöget hasonlítunk össze, és mindig olyan oldalt választunk, mely közös bennük

az első páros az: $\triangle ABC \sim \triangle ACC_0$

a közös oldal a: b – ez az $\triangle ABC$ -ben a β szöggel szemben lévő befogó; az $\triangle ACC_0$ -ben pedig az átfogó

$$\frac{b}{c_b} = \frac{c}{b} \quad / \cdot b \cdot c_b$$

a törtet eltüntetve kapjuk

$$b^2 = c \cdot c_b$$

gyököt vonva pedig

$$b = \sqrt{c \cdot c_b}$$

a második páros az: $\triangle ABC \sim \triangle CBC_0$

a közös oldal a: a – ez az $\triangle ABC$ -ben az α szöggel szembeni befogó; a $\triangle CBC_0$ -ben pedig az átfogó

$$\frac{a}{c_a} = \frac{c}{a} \quad / \cdot a \cdot c_a$$

a törtet eltüntetve

$$a^2 = c \cdot c_a$$

gyököt vonva

$$a = \sqrt{c \cdot c_a}$$

a harmadik páros az: $\triangle ACC_0 \sim \triangle CBC_0$

a közös oldal a: v – ez az $\triangle ACC_0$ -ben az α szöggel szembeni befogó; a $\triangle CBC_0$ -ben pedig a β szöggel szembeni befogó

$$\frac{v}{c_a} = \frac{c_b}{v} \quad / \cdot v \cdot c_a$$

a törtet eltüntetve

$$v^2 = c_a \cdot c_b$$

gyököt vonva

$$v = \sqrt{c_a \cdot c_b}$$

T. (Eukleidész befogótétele) A befogóra szerkesztett négyzet területe megegyezik azon téglalap területével, melynek egyik oldala az átfogó, másik oldala pedig a befogó átfogóra vetített merőleges vetülete.
A befogó mértani közepe az átfogónak és a befogó átfogóra eső merőleges vetületének.

T. (Eukleidész magasságtétele) A magasságra szerkesztett négyzet területe megegyezik azon téglalap területével, melynek oldalai a két befogó átfogóra vetített merőleges vetületei.
A magasság mértani közepe a befogók átfogóra eső merőleges vetületeinek.

T. (Pitagorasz-tétel) Az átfogóra szerkesztett négyzet területe megegyezik a befogókra szerkesztett négyzetek területeinek összegével.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

B 1.

Eukleidész befogótételeinek összeadásával kapjuk

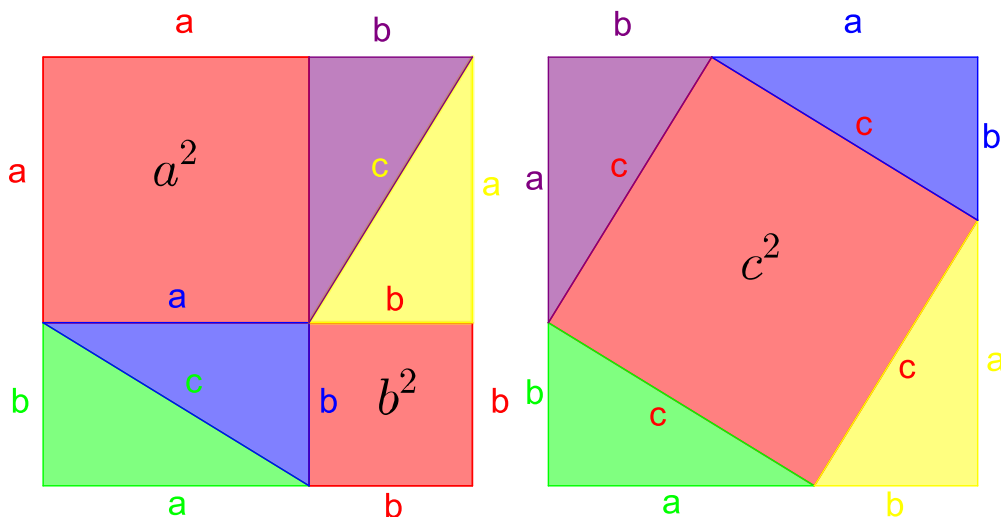
$$\left. \begin{array}{l} a^2 = c \cdot c_a \\ b^2 = c \cdot c_b \end{array} \right\} \text{I. + II.}$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot (c_a + c_b)$$

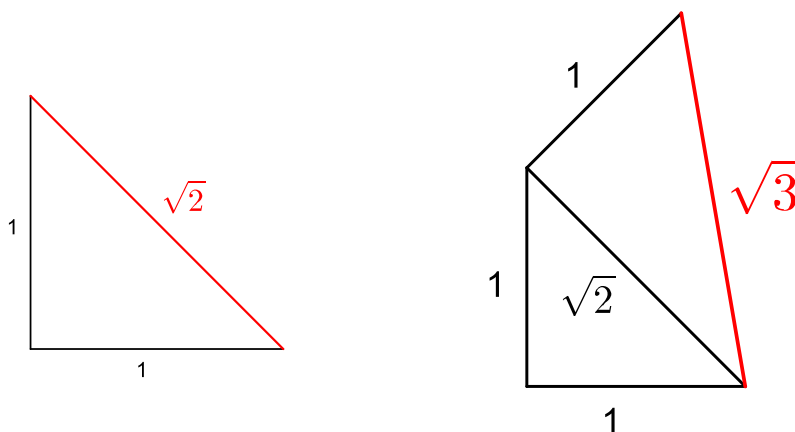
$$a^2 + b^2 = c \cdot c$$

B 2.



példa:

Szerkesszünk $\sqrt{2}$ és $\sqrt{3}$ irracionális távolságot (számot) Pitagorasz-tétel segítségével!



a gyök alapját (argumentum) két egész szám négyzetének összegeként vagy különbségeként kell megkapnunk
mikor összegként, akkor átfogóként kapjuk (lásd az ábrát feljebb)

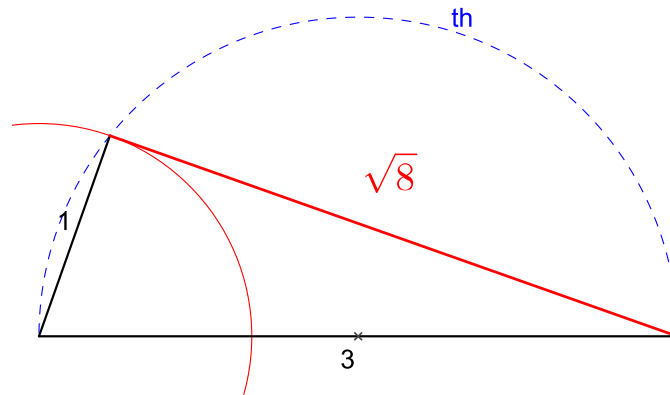
mikor különbségeként, akkor Thalész-kör segítségével befogónk lesz irracionális méretű (lásd az ábrát lejjebb)

pl. $1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$

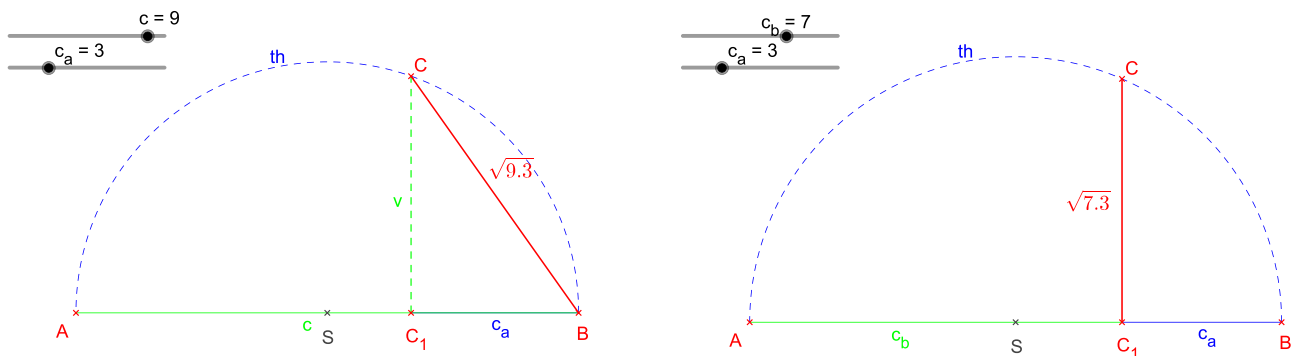
ezzel a módszerrel nem mindig kaphatjuk meg a keresett hosszat egy lépésben

pl. a $\sqrt{3}$ szerkesztésekor a $\sqrt{2}$ -t használjuk fel (két lépés)

Szerkesszünk $\sqrt{8}$ irracionális távolságot (számot) Pitagorasz-tétel segítségével!



Szerkesszünk $\sqrt{27}$ és $\sqrt{21}$ irracionális távolságot (számot) Eukleidész tételei segítségével!



irracionális távolság szerkesztése (egy lépésben) mindig megoldható Eukleidész egyik tételének alkalmazásával

gyökmennyiségünk alapját két szám szorzatára bontjuk – így akár prímszámot is felírhatunk 1-szer önmagaként

ha a befogótételt alkalmazzuk, akkor szorzatunk nagyobb száma lesz az átfogó mérete ($c = 9$), a kisebb tényező pedig az átfogó része a magasságvonal talppontjáig ($c_a = 3$), mely fölött találhatjuk a **befogót** a keresett mérettel ($\sqrt{27}$)

ha a magasságtételt alkalmazzuk, akkor átfogónk két szeletének mérete a szorzat két tényezője, így az átfogó hossza a két szám összege ($c = 7 + 3$), a keresett mérettel ($\sqrt{21}$) pedig a **magasság** rendelkezik

mindkét módszernél Thalész-körrel kapjuk meg a magasság másik végpontját (C)