

Hasonló leképezések – hasonlóság (Podobné zobrazenia)

D. Egy *leképezés hasonló*, ha tetszőleges két pontjuk és képek távolságának aránya megegyezik.

$$\forall A, B: Z(A) = A' \wedge Z(B) = B' \Rightarrow \frac{|A'B'|}{|AB|} = |\lambda|$$

λ – hasonlósági arány (hasonlósági koefficiens/együttható)

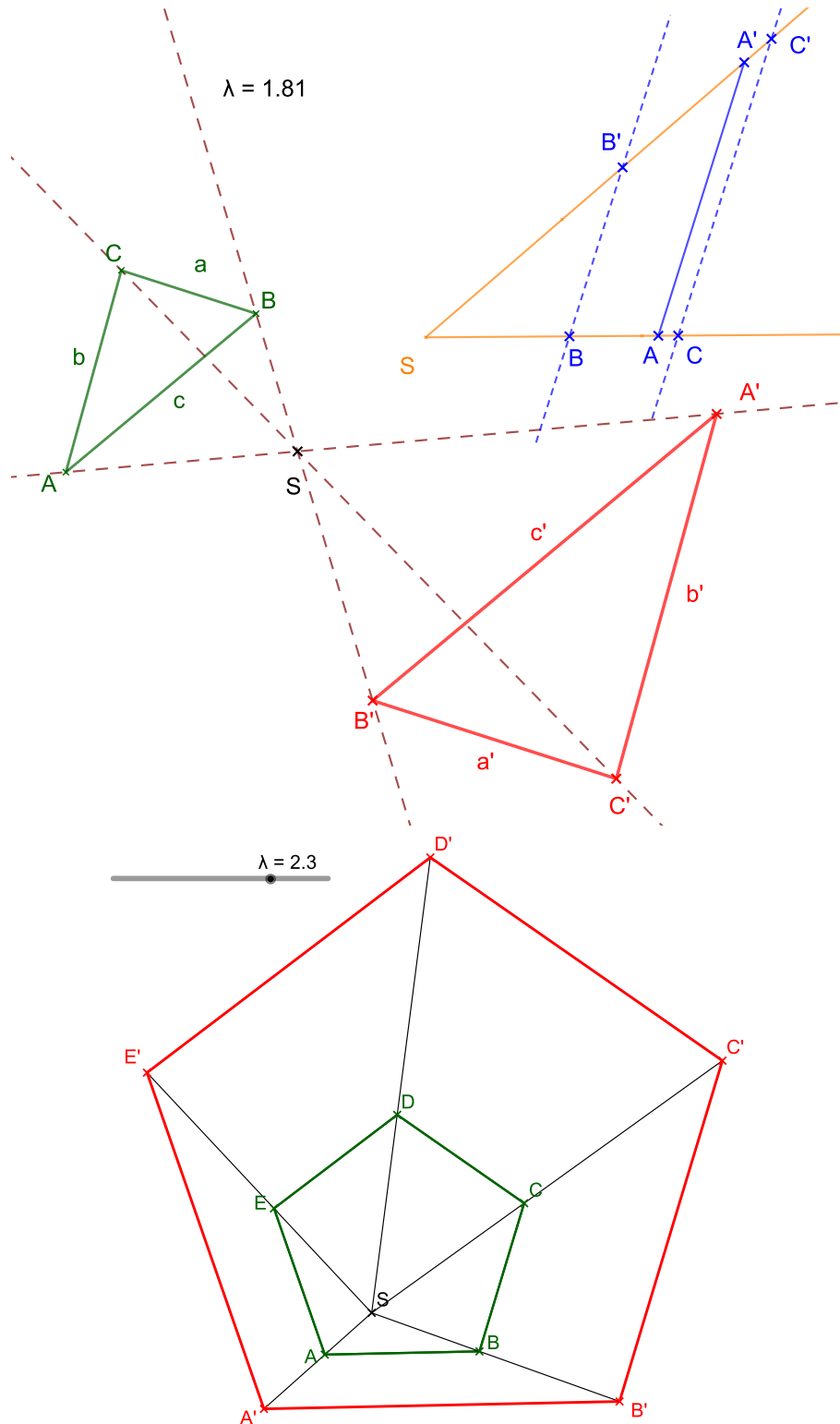
$|\lambda| > 1 \Rightarrow$ **nagyítás** (a kép nagyobb, mint az ősz)

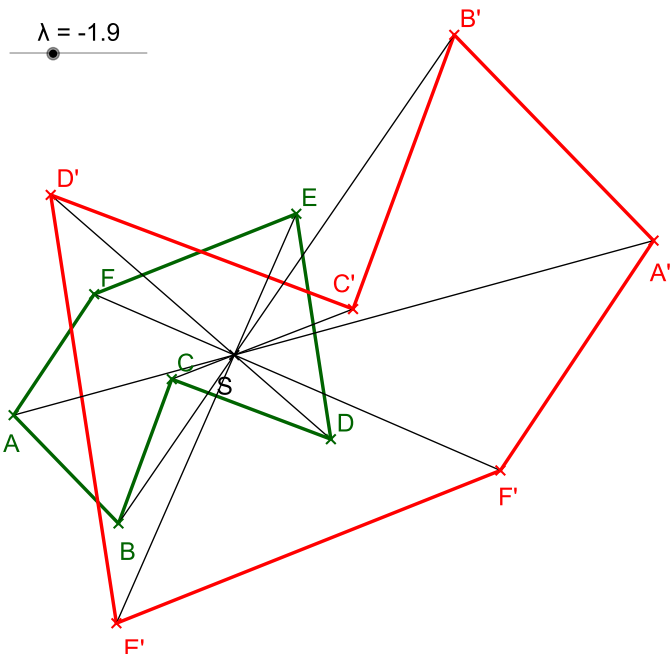
$|\lambda| < 1 \Rightarrow$ **kicsinyítés**

$|\lambda| = 1 \Rightarrow$ egybevágóság

T. A hasonló leképezés szögtartó. (távolságot nem tart meg)

Középpontos hasonlóság – homotécia (rovnoľahlost' – homotetia) ☞





a, $\exists! S: \mathcal{H}(S) = S$

b, $\forall A: \mathcal{H}(A) = A' \Rightarrow S \in AA'$

c, $\forall A: \mathcal{H}(A) = A' \Rightarrow |\lambda| \cdot |AS| = |SA'|$

d, $\forall A: \mathcal{H}(A) = A', \text{ ha } \lambda > 0 \Rightarrow A' \in \overrightarrow{SA}$

$\lambda < 0 \Rightarrow A' \notin \overrightarrow{SA}$

$\lambda > 0 \Rightarrow$ az ős és képe az S szerinti egyező félegyenesen fekszenek

$\lambda < 0 \Rightarrow$ az ős és képe az S szerinti ellentett félegyeneseken fekszenek

S (a hasonlóság középpontja) az egyedüli invariáns pont

S illeszkedik az őst és képét összekötő egyeneshez

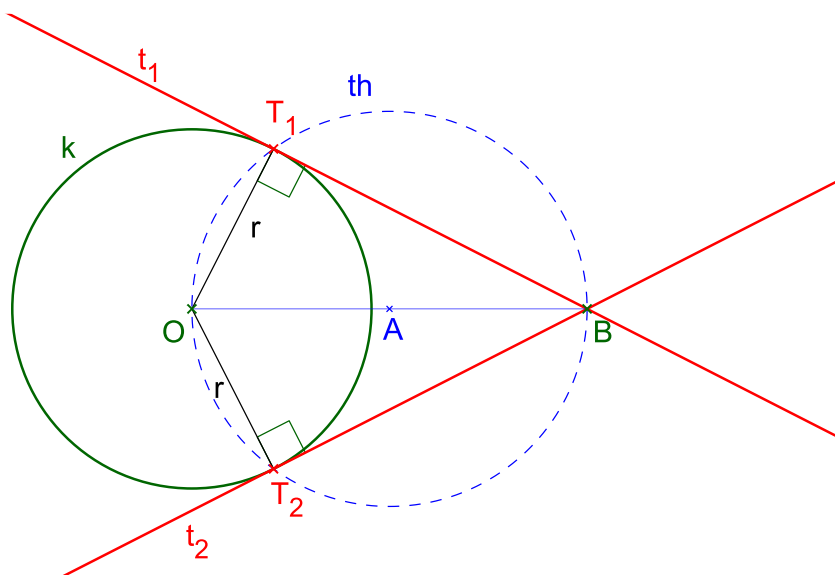
a kép-középpont és az ős-középpont közötti távolság hányadosa állandó (λ)

$\forall A, B: \mathcal{H}(A) = A' \wedge \mathcal{H}(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$

szakasz és képe párhuzamosak

megőrzi a forgatási irányt (irányítástartó) – az ABC és az A'B'C' egyező irányt mutat

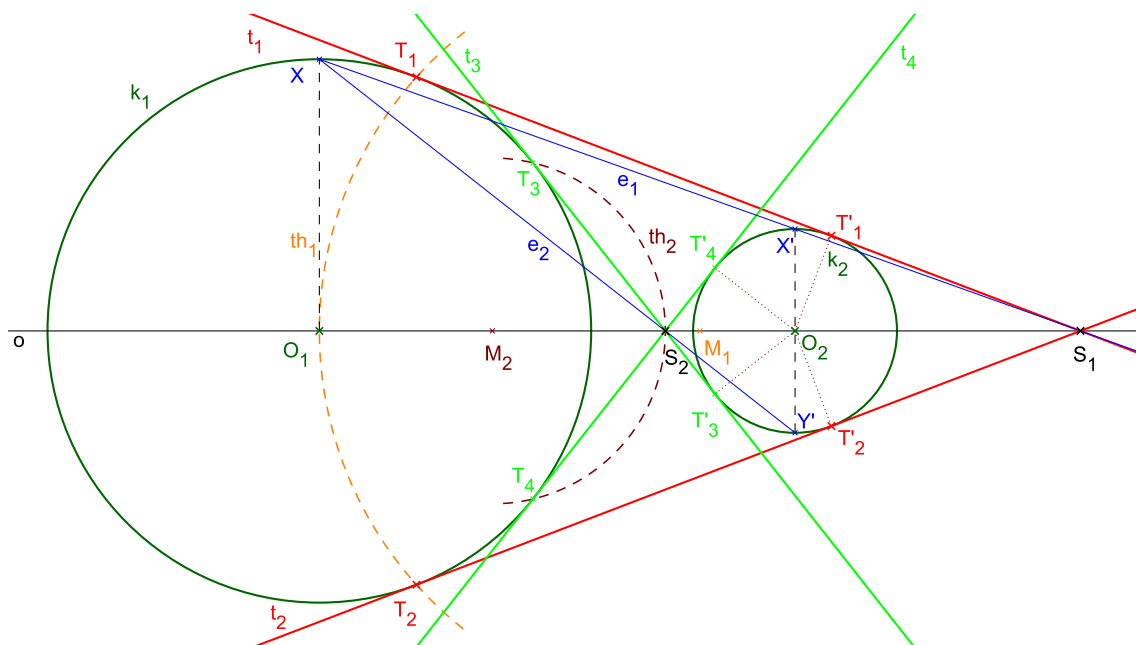
Kör érintőjének szerkesztése egy külső pontból



T. Az érintési pontban a kör sugara merőleges az érintő egyenesre. A külső pont azonos távolságra van a két érintési ponttól.

Az érintési pontokat (T_1 és T_2) Thalész-körrel szerkesztjük.

Két kör közös érintőjének szerkesztése

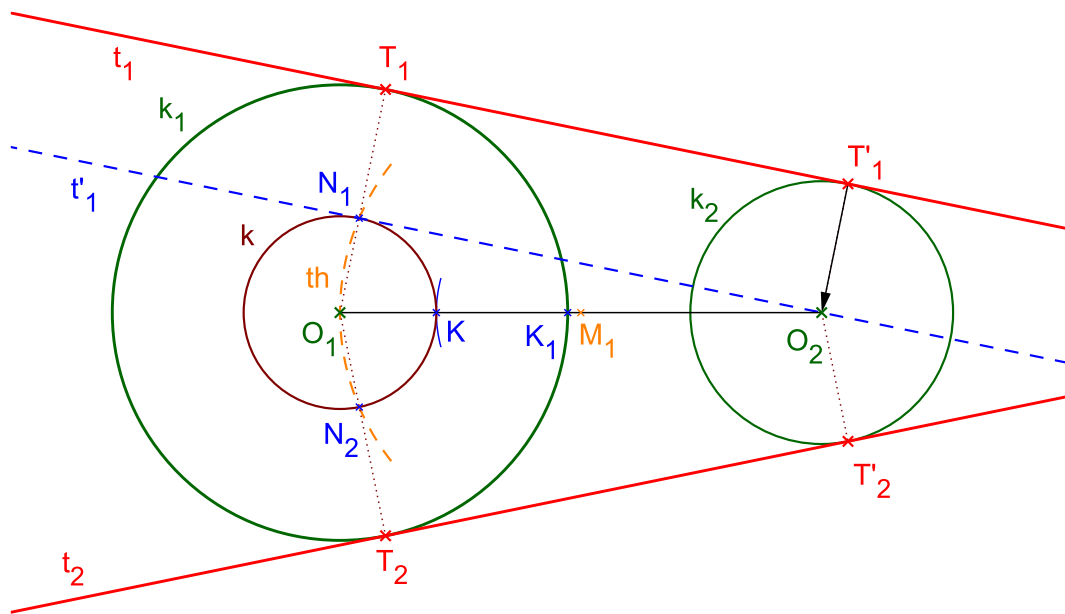


Bármely két kör hasonló (esetleg egybevágó). Pontosán két olyan középpontos hasonlóság létezik, mely átviszi az egyiket a másikba illetve fordítva. Ezen két középpontos hasonlóság csak a hasonlósági együttható előjelében különbözik egymástól. Nagysága a két kör sugarának hányadosa (aránya): $\lambda_1 = \frac{r_2}{r_1}$; $\lambda_2 = -\frac{r_2}{r_1}$ (esetleg ezen törtek reciprokai – ez csak attól függ, hogy melyik kört választjuk ősnek és melyiket képnek). Mivel a középpontos hasonlóságnál az őst képevel összekötő egyenes mindig áthalad a hasonlósági középponton, ezért a hasonlósági középpontok a két kör középpontjait összekötő egyenesen (o) fekszenek. A pozitív hasonlósági arányú középpontja (S_1) a kisebb sugarú körön túl, a negatív (S_2) pedig a két kör között (ezen középpont létezésének feltétele, hogy a köröknek nincs közös pontja/közös pontjai; illetve az egyik kör nincs a másik belsejében). Ezen hasonlósági középpontok megtalálásához felhasználjuk leképezésünk azon tulajdonságát, hogy szögtartó. Így szerkesztünk egy szöget az egyik körünkben. Mivel a derékszög viszonylag könnyen szerkeszthető (megengedett karcolatos vonalzót használni), így egy, a köreink középpontját összekötő egyenesre merőleges sugarat választunk (O_1X). Ennek képe a másik körünkben is egy merőleges sugar lesz – vagy az O_2X' vagy az O_2Y' . Ezek után összekötjük az X pontot (ős) az X' ponttal (kép) – e_1 egyenes; illetve az Y' ponttal – e_2 egyenes. Ezen egyenesek metszéspontja az körök középpontját összekötő egyenessel adja a keresett hasonlósági középpontokat – S_1 és S_2 pontok.

Két körnek (legfeljebb) négy közös érintője lehet: két közös külső érintő (t_1 és t_2) és két közös belső érintő (t_3 és t_4). Ezek pontosan a két hasonlósági középponthoz illeszkednek. A közös külsők a pozitív hasonlósági arányú középpontjához (S_1), a közös belsők pedig a negatív arányú középpontjához (S_2). Ebből adódik, hogy a közös érintők most már megszerkeszthetők, mint a kör közönséges érintői egy külső pontból. Az S_1 és S_2 pontokból az egyik körhöz húzott érintő a másik körnek is érintője lesz. Szerkesztésünk pontosabb, ha a nagyobb sugarú körhöz (k_1) szerkesztjük az érintőket mindkét külső pontból.

Így nagyobbik körünkön az érintési pontokat ($T_1, T_2; T_3, T_4$) a két Thalész-körrel ($th_1; th_2$) való metszéspontként kapjuk. Kisebbik körünkön az érintési pontokat ($T'_1, T'_2; T'_3, T'_4$) pedig a kör középpontjából (O_2) az egyes érintőkre ($t_1, t_2; t_3, t_4$) bocsájtott merőlegesek talppontjaként kapjuk.

A közös külső érintők szerkesztésének alternatív módja



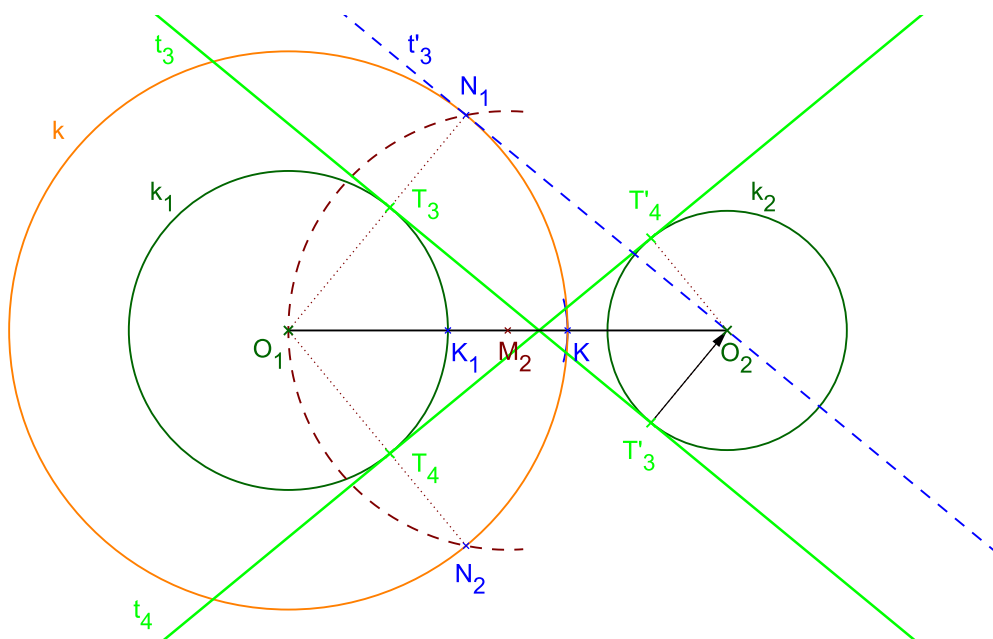
Mikor a pozitív hasonlósági arányú középpontos hasonlóság középpontja nem elérhető (köreink sugara között túl kicsi a különbség, vagy túl messze vannak egymástól), találunk kell egy más módszert a közös külső érintők megszerkesztésének.

Tegyük fel, hogy már ismerjük pl. a t_1 közös érintőt. Toljuk el őt a kisebbik kör sugarával (r_2) T'_1O_2 irányban $\rightarrow$ így megkapjuk a t'_1 egyenest. Ez az egyenes érintője egy olyan k körnek, melynek sugara pontosan a két adott köröm (k_1 és k_2) sugarának különbsége: $r = r_1 - r_2$.

A szerkesztés az alábbi módon valósítható meg. Először megszerkesztjük az úgynevezett különbözeti k kört O_1 középponttal. Utána a másik kör középpontjából (O_2) mint külső pontból megszerkesztjük a k körhöz az érintőket (elegendő a különbözeti kör és a Thalész-kör N_1 és N_2 metszéspontjait megkeresni). Ezeket összekötve az O_1 középponttal (O_1N_1 és O_1N_2), meghosszabbításuk kimetszi a nagyobbik k_1 körönm a keresett közös érintők két érintési pontját (T_1 és T_2). Már csak az érintők megszerkesztése marad: vagyis merőlegest húzva a két sugárra (O_1T_1 és O_1T_2) az érintési pontokban, megkapjuk a két közös külső érintőt.

M. Ez a szerkesztés a valóságban (papíron, táblánál) nem túl pontos. Nem az elméletében van hiba (mert az hibátlan). A pontatlanság abból adódik, hogy a különbözeti körünk sugara általában nagyon kicsi. Mikor a középpontot összekötjük a különbözeti kör két érintési pontjával (N_1 és N_2), ezek közelsége miatt egy apró eltérés is a vonalzónk illesztésénél nagy hibát okozhat a keresett érintési pontok helyében (a k_1 körrel való metszéspontokban). Így a sugarakra húzott merőlegecek (maguk az érintők) nem biztos, hogy a másik kört is érintik – szelők vagy külső egyenesek is lehetnek.

A közös belső érintők szerkesztésének alternatív módja



A közös belső érintők szerkesztésének is van hasonló alternatívája.

Tegyük fel, hogy már ismerjük pl. a t_3 közös érintőt. Toljuk el őt a kisebbik kör sugarával (r_2) T'_3O_2 irányban $\rightarrow$ így megkapjuk a t'_3 egyenest. Ez az egyenes érintője egy olyan k körnek, melynek sugara pontosan a két adott köröm (k_1 és k_2) sugarának összege: $r = r_1 + r_2$.

Vagyis: ha az O_1 középpont köré a két sugár összegével ($r_1 + r_2$) kört rajzolok, utána a másik kör középpontjából mint külső pontból érintőt szerkesztek (megkeresem a Thalész-kör N_1 és N_2 metszéspontjait), ezen pontokat összekötve a kör középpontjával, megkapom a keresett közös érintőim érintési pontjait (T_3 és T_4). Már csak az érintők megszerkesztése marad – merőleges a sugarakra (O_1T_3 és O_1T_4) az érintési pontokban.